微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

1 $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ とする.

a) x が 0 から h まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{(1-2h)^2} - \frac{1}{1^2}}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(1-2h)^2} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1-2h)^2}{(1-2h)^2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1-4h+4h^2)}{(1-2h)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{4h-4h^2}{(1-2h)^2}\right) = \frac{4-4h}{(1-2h)^2}$$

b) $f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を極限による定義を用いて直接計算せよ.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4-h}{(1-2h)^2} = 4$$

2 $f(x) = \dfrac{2x-5}{2x-3}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域をを求めよ.

分母 $\neq 0$ より，$x \neq \dfrac{3}{2}$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を求めよ.

$y = \dfrac{2x-5}{2x-3}$ を解く．$(2x-3)y = 2x-5$ より，$(2y-2)x = 3y-5$.
よって，$y \neq 1$ のとき解を持ち，$x = \dfrac{3y-5}{2(y-1)}$.
ここで，x と y を入れ換えて，$y = f^{-1}(x) = \dfrac{3x-5}{2(x-1)}$.
$f^{-1}(x)$ の定義域は $x \neq 1$.

c) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の値域を求めよ.

$f(x)$ の値域は b) の解を持つ条件より，$y \neq 1$.
$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域より，$y \neq \dfrac{3}{2}$.

d) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成り立つことを確かめよ.

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\frac{2x-5}{2x-3} - 5}{2(\frac{2x-5}{2x-3} - 1)} = \frac{3(2x-5) - 5(2x-3)}{2((2x-5)-(2x-3))}$$
$$= \frac{-4x}{2(-2)} = x$$

e) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left(\frac{2x-5}{2x-3}\right)' = \left(1 - \frac{-2}{2x-3}\right)' = -2\left((2x-3)^{-1}\right)'$$
$$= -2 \times (-(2x-3)^{-2}) \times (2x-3)' = 4(2x-3)^{-2} = \frac{4}{(2x-3)^2}$$

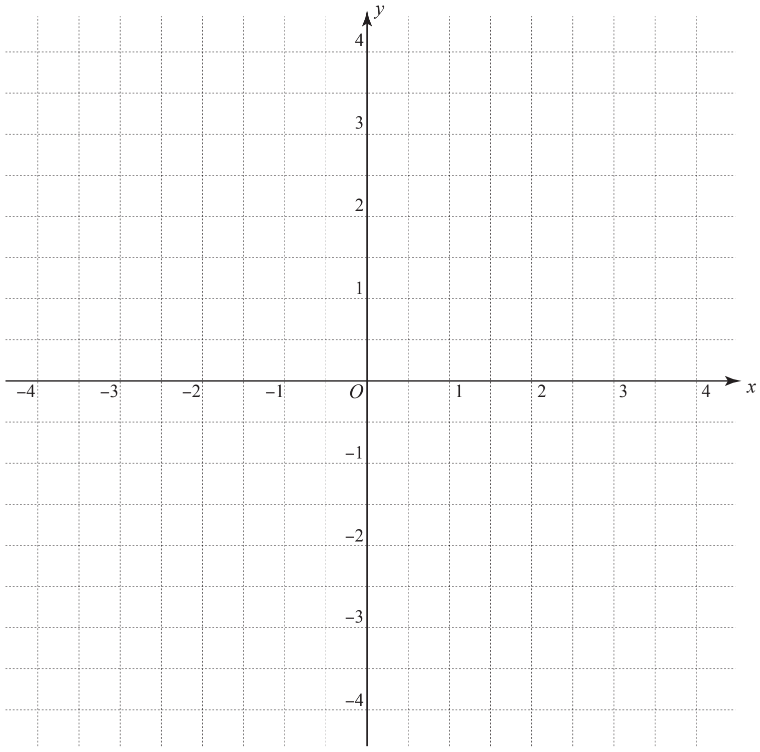
f) $y = f(x)$ のグラフの $\big(3, f(3)\big)$ における接線の方程式を求めよ.

$f'(-1) = \dfrac{4}{(2\times 3-3)^2} = \dfrac{4}{9}$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$ より，
$y = \dfrac{4}{9}(x-3) + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{9}x - 1$.

g) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -2x+3$ の交点を求めよ.

$\frac{2x-5}{2x-3} = -2x+3$ の分母を払って，
$2x-5 = -(2x-3)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) = 0$
$\therefore x = 2, \dfrac{1}{2}$．したがって，交点は $(2,-1), \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

h) $y = f(x)$ のグラフとその $\big(3, f(3)\big)$ における接線，および直線 $y = -2x+3$ を下の座標平面内に描け.



i) グラフを利用して不等式 $\dfrac{2x-5}{2x-3} \leqq -2x+3$ を解け.

グラフより，$x \leqq \dfrac{1}{2}$ または，$\dfrac{3}{2} < x \leqq 2$.

3 $f(x) = \sqrt{-2x+5}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域： $x \leqq \dfrac{5}{2}$

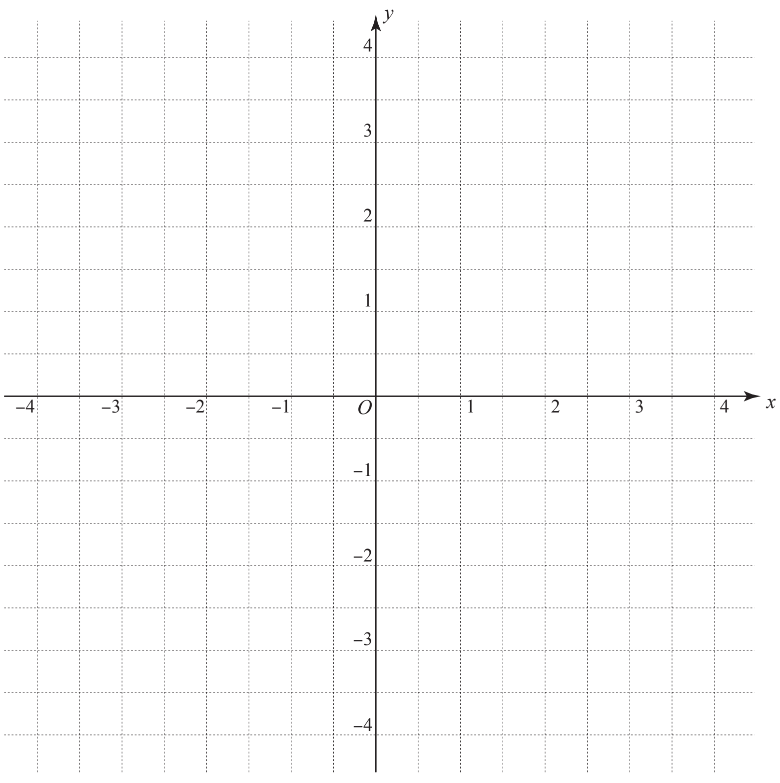
値域：$y \geqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

d) $y = f(x)$ のグラフの $\bigl(-2, f(-2)\bigr)$ における接線の方程式を求めよ．

e) $y = f(x)$ のグラフとその $\bigl(-2, f(-2)\bigr)$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



4 微分の公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ について，$a = n$ (n は整数) の場合と，$a = \dfrac{1}{n}$ (n は整数）の場合はすでに証明されているとする．このとき，$a = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数）の場合を合成関数の微分公式を用いて証明せよ．

5 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$

6 次の関数を対数微分法 (両辺の絶対値の自然対数を取って微分する方法) により微分せよ．

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{x-1}$$

【2 枚目につづく】

微分積分 I	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
火曜２限 担当: 鍬田 政人													

$\boxed{6}$ $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 で表すこと．）

x	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
$f(x)$	

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ．

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$\boxed{7}$ a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ を求めよ．ただし，r は定数である．

b) 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる．年利 4% $(r = 0.04)$ の連続複利で運用した場合，元本がもとの 2 倍になるのはおよそ何年後か．$\log 2 = 0.693$ として計算せよ．

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】