入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 関数 $f(x) = (2x-3)^2$ について，以下の問いに答えよ．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，できるだけ簡単にせよ．

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(2(a+h)-3)^2-(2a-3)^2}{h}\\ &= \frac{(2a+2h-3)^2-(2a-3)^2}{h}\\ &= \frac{4a^2+4h^2+9+8ah-12a-12h-(4a^2-12a+9)}{h}\\ &= \frac{4h^2+8ah-12h}{h}\\ &= 4h+8a-12\end{aligned}$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を極限を用いた定義を直接用いて求めよ．

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+8a-12)\\ &= 8a-12 = 4(2a-3)\end{aligned}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

$(1,1)$ における接線の傾きは $f'(1) = 4(2-3) = -4$.
よって，求める接線は $(1,1)$ を通り，傾き -4 の直線だから
$y-1 = -4(x-1)$ より，$y = -4x+5$.

2 関数 $f(x) = \dfrac{1}{cx+d}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，c, d は定数で，$d \neq 0$ とする．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，できるだけ簡単にせよ．

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{c(a+h)+d}-\frac{1}{ca+d}}{h}\\ &= \frac{ca+d-\big(c(a+h)+d\big)}{h\big(c(a+h)+d\big)(ca+d)}\\ &= \frac{-ch}{h\big(c(a+h)+d\big)(ca+d)}\\ &= \frac{-c\cancel{h}}{\cancel{h}\big(c(a+h)+d\big)(ca+d)}\\ &= \frac{-c}{\big(c(a+h)+d\big)(ca+d)}\end{aligned}$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を a) でもとめた平均変化率の極限として求めよ．

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-c}{\big(c(a+h)+d\big)(ca+d)}\\ &= \frac{-c}{\big(c(a+0)+d\big)(ca+d)}\\ &= \frac{-c}{(ca+d)^2}\end{aligned}$$

3 関数 $f(x) = \sqrt{2x+3}$ について，以下の問いに答えよ．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，分子を有理化することにより，できるだけ簡単にせよ．

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3}\right)\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)}{h\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{2(a+h)+3-(2a+3)}{h\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{2h}{h\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)}
\end{aligned}
$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を平均変化率の極限として求めよ．

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{2(a+0)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a+3}}
\end{aligned}
$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, 1)$ における接線の方程式を求めよ．

$(1, 1)$ における接線の傾きは $f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{2(-1)+3}} = 1$.
よって，求める接線は $(-1, 1)$ を通り，傾き 1 の直線だから
$y - 1 = 1\cdot(x+1)$ より，$y = x2$.

4 次の各々の関数について，その導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+(x+h)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+x^2)-\left(1+(x+h)^2\right)}{h\left(1+(x+h)^2\right)(1+x^2)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+x^2-1-x^2-2xh-h^2}{h\left(1+(x+h)^2\right)(1+x^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h(2x+h)}{h\left(1+(x+h)^2\right)(1+x^2)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}\left(1+(x+h)^2\right)(1+x^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{\left(1+(x+h)^2\right)(1+x^2)} \\
&= \frac{-(2x+0)}{\left(1+(x+0)^2\right)(1+x^2)} \\
&= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x+0}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+0}\right)} \\
&= \frac{-1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$