入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

1 次の分数式を約分して、既約な分数式になおせ.

a) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8} = \dfrac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x-4)} = \dfrac{x+3}{x-4}$

b) $\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-9x} = \dfrac{\cancel{x}(x-2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x}(x-3)\cancel{(x+3)}} = \dfrac{x-2}{x-3}$

c) $\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \dfrac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{(x-a)}(x+a)} = \dfrac{x^2+ax+a^2}{x+a}$

2 次の分数式をなるべく簡単にせよ.

a) $\dfrac{1}{x-a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{x-a}\left(\dfrac{a-x}{xa}\right) = \dfrac{1}{\cancel{x-a}}\left(\dfrac{-\cancel{(x-a)}}{xa}\right) = \dfrac{-1}{xa}$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} = \dfrac{-\cancel{h}}{(a+h)a} \times \dfrac{1}{\cancel{h}} = \dfrac{-1}{(a+h)a}$

3 次の極限を求めよ.

a) $\lim_{x\to 2}(x^2-x+2)(3x-1) = 20$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{1^2-1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to -2}\dfrac{x+3}{x-4} = -\dfrac{1}{6}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-9x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{2}{3}$

e) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a}\dfrac{x^2+ax+a^2}{x+a} = \dfrac{a^2+a\cdot a+a^2}{a+a} = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3}{2}a$

f) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}\dfrac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = 3a^2$

g) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(3a^2+3ah+h^2)\cancel{h}}{\cancel{h}}$

$= \lim_{h\to 0}(3a^2+ah+h^2) = 3a^2$

h) $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right) = \lim_{x\to a}\dfrac{-1}{xa} = -\dfrac{1}{a^2}$

i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{(a+h)a} = -\dfrac{1}{a^2}$

【裏に続く】

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$ について以下の問いに答えよ.

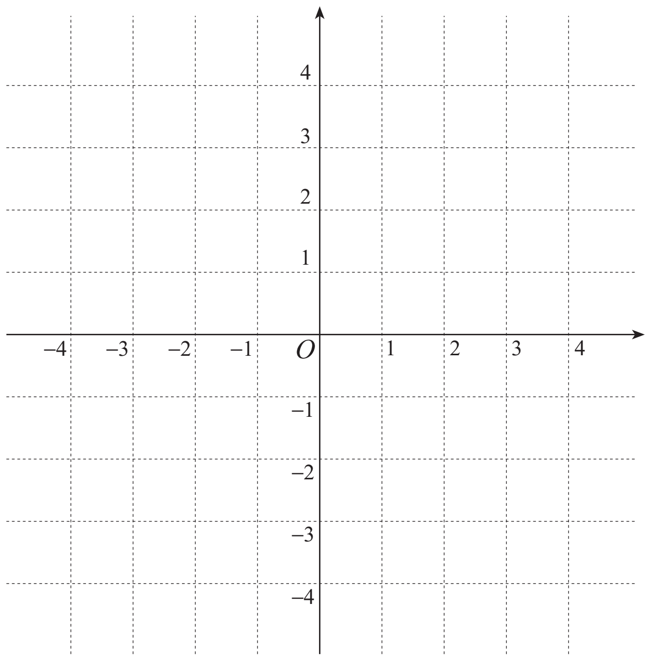
a) 関数 $f(x)$ の定義域を示せ.

$x \neq 0$　（正確には $\{x \mid x$ は実数, $x \neq 0\}$ とか，$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ などと表すべきではあるが…）

b) 関数 $f(x)$ を，絶対値記号を用いない，場合分けによる形で表せ.

$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ と表せるから，$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & (x \geqq 0) \\ \frac{x^3}{-x} & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} x^2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

c) $y = f(x)$ のグラフを描け.



d) グラフから $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|}$ を求めよ.

グラフを見ると，x が正の値を保ちながら 0 に近づいても，x が負の値を保ちながら 0 に近づいても，
y の値はいずれも 0 に近づく.

$\therefore \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ のとする.

a) x が 1 から 2 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ.

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\frac{1}{2-3\cdot 2} - \frac{1}{2-3\cdot 1}}{1} = \frac{1}{-4} - \frac{1}{-1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

b) $x = 1$ における $f(x)$ の瞬間変化率（= 微分係数）$f'(1)$ を定義にしたがって求めよ.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2-3(1+h)} - \frac{1}{2-3\cdot 1}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{-1-3h} - \frac{1}{-1} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{-1}{1+3h} + 1 \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{-1+(1+3h)}{1+3h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{3\cancel{h}}{1+3h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3}{1+3h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ.

求める接線は $(1, -1)$ を通り傾き $f'(1) = 3$ の直線だから，その方程式は

$y - (-1) = 3(x - 1)$.

$\therefore y = 3x - 4$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)