基礎数学 B1	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
火曜 4 限 担当: 鍬田 政人													

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

1 実数全体の集合 U の部分集合 A, B を次のように定める.

$A = \{x \mid x$ は 20 以下の素数 $\}$,

$B = \{x \mid |x-8| < a\}$

ただし，a は正の定数とする.

a) A を外延的記法（要素をすべて並べて表す表し方）によって表せ.（1 は素数ではないことに注意.）

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

b) $A \cap B = \phi$ となるような a の範囲を求めよ.

7 が 8 に一番近いので，$8 \notin A$ となる a の範囲を求めると，$a \leqq 1$.

c) $A \subset B$ となるような a の範囲を求めよ.

8 から一番遠いのは 19 なので，$19 \in A$ となる a の範囲を求めると，$a > 11$.

2 10 円硬貨 4 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 2 枚，500 円硬貨 1 枚が入った袋がある．この袋の中から無作為に硬貨 1 枚を選び，その硬貨を投げるという試行を考える．硬貨の表が出ることを H，裏が出ることを T で表し，たとえば選んだ硬貨が 50 円玉で，投げて表が出たという結果を (50, H) という記号で表し，この試行の標本空間 Ω を次のように表す.

$$\Omega = \{(10, \mathrm{H}), (10, \mathrm{T}), (50, \mathrm{H}), (50, \mathrm{T}), (100, \mathrm{H}), (100, \mathrm{T}), (500, \mathrm{H}), (500, \mathrm{T})\}$$

a) ある試行の結果として起こりうる事柄を事象と呼ぶのであった．この試行に関する事象は全部で何通りあるか.

事象は Ω の部分集合の数だけあるから，全部で $2^8 = 256$ 個ある.

b) $P(\{(50, \mathrm{T})\})$ を求めよ.　$P(\{(50, \mathrm{T})\}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

c) 「金額が 100 円以上の硬貨を選ぶ」という事象を A とするとき，A を表す集合を外延的記法によって表せ.

$A = \{(100, \mathrm{H}), (100, \mathrm{T}), (500, \mathrm{H}), (500, \mathrm{T})\}$

d) 「投げた硬貨は表が出た」という事象を B とするとき，$A \cap B$ を表す集合を外延的記法によって表せ.

$A \cap B = \{(100, \mathrm{H}), (500, \mathrm{H})\}$

e) 確率 $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ を求めよ.

$P(A) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

f) 事象 A と事象 B は独立であるかどうかを判定せよ.

$P(A)P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20} = P(A \cap B)$ だから，A と B は独立.

g) 50 円払ってこの試行を行い，選んだ硬貨を投げて表が出たときはその硬貨が賞金としてもらえるというゲームをする．賞金を X とするとき，確率変数 X の確率分布を求めよ.

X	0	10	50	100	500	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

h) このゲームをする価値はあるか，理由を付けて答えよ.

$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{5} + 50 \times \frac{3}{20} + 100 \times \frac{1}{10} + 500 \times \frac{1}{20}$
$= 45.5$

賞金の期待値が払う金額より少ないので，損をしたくなければこのゲームはしない方がいい.

3 事象 A, B について，$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ であるとする.

a) $P(A \cup B) = a$ としたとき，$P(A \cap B)$ を a で表し，a の取り得る値の範囲を求めよ.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - a = \frac{5}{6} - a$

$0 \leqq P(A \cap B) \leqq 1$ だから，$0 \leqq \frac{5}{6} - a \leqq 1$．また，$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ だから，$P(A) \leqq P(A \cup B)$, $P(B) \leqq P(A \cup B)$.

以上より，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{6}$.

b) 事象 A と B が独立となるための a の値を求めよ.

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} - a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

4 1 から 5 までの番号をつけた 5 枚のカードから，同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の積を X とする.

a) X の期待値と分散を求めよ.

$E(X) = \frac{1}{10}(2+3+4+5+6+8+10+12+15+20) = \frac{85}{10} = \frac{17}{2}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{1}{10}(4+9+16+25+36+64+100+144+225+400) - \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$= \frac{1023}{10} - \frac{289}{4} = \frac{601}{20}$

b) 確率変数 Y を 1 次式 $Y = aX + b$ で定める．ただし，a, b は定数で，$a > 0$ とする．Y の期待値が 0，分散が 1 となるような a, b の値を求めよ.

$$\begin{cases} E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b = \frac{17}{2}a + b = 0 \\ V(Y) = V(aX+b) = a^2V(X) = \frac{601}{20}a^2 = 1 \end{cases}$$

を a, b について解くと，$a = \frac{2\sqrt{3005}}{601}$, $b = -\frac{17\sqrt{3005}}{601}$.

【裏面につづく】

5 新型コロナウィルス感染症「第 7 波」の最中，感染者が最も多かった 2022 年 8 月中旬での東京の潜在的な感染率は約 1% と推計されていた．PCR 検査の感度（新型コロナウイルス感染症に感染している人のうち，PCR 検査が陽性となる割合) は 70% で，特異度（感染していない人が PCR 検査で陰性となる割合）は 99.9% とする．新型コロナウィルス感染症に感染しているという事象を C，PCR 検査で陽性判定が出たという事象を Y として，以下の問いに答えよ．

a) 問題文から直接 $P(C)$，$P_C(Y)$，$P_{\overline{C}}(\overline{Y})$ を求めよ．

$P(C) = 0.01$

$P_C(Y) = 0.7$

$P_{\overline{C}}(Y) = 0.999$

b) $P(C \cap Y)$，$P(\overline{C} \cap \overline{Y})$ を求めよ．

$P(C \cap Y) = 0.007$

$P(\overline{C} \cap \overline{Y}) = 0.98901$

c) 新型コロナウィルス感染症の感染者と PCR 検査で陽性判定を受けた人の割合を示す一覧表を完成させよ．

ウィルス / 検査	感染 (C)	非感染 $(\overline{C})$	計
陽性 (Y)	0.7 %	0.099 %	0.799 %
陰性 $(\overline{Y})$	0.3 %	98.901 %	99.201 %
計	1 %	99 %	100 %

d) このような状況の中での PCR 検査の陽性的中率（陽性判定が出た人の中で本当に感染している人の割合）を求めよ．

求める確率は $P_Y(C)$.

$$P_Y(C) = \frac{P(C \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.7}{0.799} = 0.876$$

6 二つの確率変数 X，Y に対して，共分散と呼ばれる値 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ が定義され，$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ である．

$$V(X + Y) = V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

であることを証明せよ．

$$\begin{aligned}
&V(X+Y)\\
&= E((X+Y)^2) - (E(X) + E(Y))^2\\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y)\\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)\\
&= (E(X^2) - E(X)^2) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) + (E(Y^2 - E(Y)^2)\\
&= V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

7 ある大リーグの好打者が打席に立ったとき，ヒットや四死球で出塁する確率（出塁率）は 3 割 8 分であるという．この選手が 1 シーズン 600 回打席にたったとき，出塁する回数を X とする．X の期待値と分散を求めよ．また，標準偏差は 12 より大きいかどうかを述べよ．

確率変数 X は二項分布 $B(600, 0.380)$ にしたがう．したがって
$E(X) = 600 \times 0.380 = 228$

$V(X) = 600 \times 0.380 \times 0.620 = 141.36$

また，$V(X) \leqq 12^2 = 144$ なので，$\sigma(X)$ は 12 より小さい．

8 原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．サイコロを投げ，5 か 6 の目が出たら P は $+6$ だけ移動し，そうでなければ -1 だけ移動する．サイコロを 15 回投げ終わったとき，5 か 6 の目が出た回数を X とし，そのときの P の座標を Y とする．以下の問いに答えよ．

a) X は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表せ．

$$X \sim B\left(15, \frac{1}{3}\right)$$

b) X の期待値，分散を求めよ．

$$E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

$$V(X) = 15 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

c) X と Y の関係を式で表せ．

$$\begin{aligned}
Y &= (+6) \times \text{（5 か 6 の目が出る回数）} + (-1) \times \text{（それ以外の目が出る回数）}\\
&= (+6) \times X + (-1) \times (15 - X)\\
&= 7X - 15
\end{aligned}$$

d) Y の期待値，分散を求めよ．

$$E(Y) = E(7X - 15) = 7E(X) - 15 = 7 \times 5 - 15 = 20$$

$$V(Y) = V(7X - 15) = 7^2 V(X) = 7^2 \times \frac{10}{3} = \frac{490}{3}$$

— 以上 —