入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
	B	1				氏 名

1 次のそれぞれの式を簡単にせよ．ただし，文字はすべて正とする．

a) $4^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $(a^{\frac{1}{3}} - 1)(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1) = a - 1$

c) $(a^x + a^{-x})^2 - (a^x - a^{-x})^2 = 4$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

e) $\dfrac{(ab^{-\frac{5}{2}}) \div (a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{5}{4}})}{(a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}) \div (a^{\frac{9}{4}}b^{-\frac{1}{2}})} = a^{\frac{9}{2}}b^{-\frac{5}{2}}$

2 次の数の大小をくらべよ．0.5^4，0.5^{-3}，2^{-2}．

$x < y \Leftrightarrow 2^x < 2^y$ だから，すべてを 2^a の形に直して比べればよい．

$0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}$，$0.5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$ であり，$2^{-4} < 2^{-2} < 2^3$．だから

$$0.5^4 < 2^{-2} < 0.5^{-3}$$

3 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ．

a) $0.3^x > 0.09$

$0.09 = 0.3^2$ なので，上の不等式は $0.3^x > 0.3^2$ となる．ここで，対数の底 0.3 は 1 より小さいので $x < y \Leftrightarrow 0.3^x > 0.3^y$ と不等号の向きが入れ替わることに注意すると，$0.3^x > 0.3^2 \Leftrightarrow x < 2$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq (\sqrt{2})^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-(x-1)}$，$(\sqrt{2})^x = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$ なので，上の不等式は $2^{-(x-1)} \geqq 2^{\frac{x}{2}}$ となる．これは $-(x-1) \geqq \frac{x}{2}$ と同値．したがって，$x \leqq \frac{2}{3}$．

4 $\log_2 3 = a$ とするとき，次のそれぞれの値を a を用いて表せ．

a) $\log_4 9$

$\log_4 9 = \dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 4} = \dfrac{2\log_2 3}{2} = a$．

b) $\log_3 4$

$\log_3 4 = \dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3} = \dfrac{2}{a}$．

c) $\log_9 2$

$\log_9 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3^2} = \dfrac{1}{2a}$．

5 次のそれぞれの式を簡単にせよ．

a) $2^{\log_2 3} = 3$

b) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24} = \log_5\left(\dfrac{3^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})^3}{\sqrt{24}}\right) = \log_5 1 = 0$

c) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$= (2\log_2 3)\left(\dfrac{5}{2\log_2 3}\right) = 5$

d) $\log_2 8 \cdot \log_{27} 5 \cdot \log_5 3 = \log_2 2^3 \cdot \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3^3} \cdot \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = 3 \cdot \dfrac{\log_2 5}{3\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = 1$

6 次の方程式を解け．

a) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

真数条件は，$(x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ または $x > -1$．

$\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0.5^{-1} \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -3$．これらはどちらも真数条件をみたすので，

解は $x- = 0, -3$．

b) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

真数条件は，$(x-2) > 0$ かつ $(2x-7) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$．

$\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x-2)(2x-7) = 2 \Leftrightarrow (x-2)(2x-7) = 3^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 5, \frac{1}{2}$．このうち真数条件をみたすのは，解は $x = 5$ のみ．

【裏に続く】

$\boxed{7}$ 「過疎現象で，村の人口が毎年 1 割ずつ減っていくので，このままでは 10 年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか.

人口が毎年 1 割ずつ減るとは，人口が前年の 9 割になる，すなわち前年の 0.9 倍になるということである. これが 10 年続くと，人口はもとの $(0.9)^{10}$ になるが，これは 0 ではないので，村が空っぽになるわけではない.

以下の問題では，必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ.

$\boxed{8}$ a) 2^{41} は何桁の数か.

b) 2^{41} の最高位の数字を求めよ.

$\log_{10} 2^{41} = 41 \log_{10} 2 \fallingdotseq 41 \times 0.3010 = 12.3410$ であるが,

$$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.301 < 0.341 < \log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$$

より,

$$\log_{10}(2 \times 10^{12}) < \log_{10} 2^{41} < \log_{10}(3 \times 10^{12})$$

が成り立つ. すなわち,

$$2 \times 10^{12} < 2^{41} < 3 \times 10^{12}$$

これは，a) 2^{41} が 13 桁の数で，b) その最高位の数字が 2 であることを示している.

$\boxed{9}$ 体内に入った水銀が体外に排出されて，もとの量の $\dfrac{1}{2}$ になるには 125 日かかるといわれている. もとの量の $\dfrac{1}{10}$ 以下になるには何日かかるか.

水銀が体内に入ってから 125 日後にもとの量の $\dfrac{1}{2}$ なり，125×2 日後にはもとの量の $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，$125 \times 3$ 日後にはもとの量の $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$，…，$125 \times n$ 日後にはもとの量の $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqq \log_{10} \frac{1}{10} \Leftrightarrow -n \log_{10} 2 \leqq -1$$
$$\Leftrightarrow n \geqq \frac{1}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \frac{1}{0.3010} \fallingdotseq 3.322$$

水銀が体内に入ってから $125 \times 3.322 \fallingdotseq 415.3$ 日後にもとの量の $\dfrac{1}{10}$ になる.

［水銀が体内に入って x 日後にはもとの量の $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}}$ になるから $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}} \leqq \dfrac{1}{10}$ を解いてもよい.］

$\boxed{10}$ 座標軸の 1 目盛りを 1cm として関数 $y = 2^x$ のグラフをかくとき，x の変域をたとえば $0 \leqq x \leqq 10$ とすると y の変域は $1 \leqq y \leqq 2^{10}$ となり，グラフ用紙は y 軸方向について 1024cm の長さが必要と考えられる. x の変域を $0 \leqq x \leqq 60$ としたとき，グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さが必要か. 次のうちから最も近いものを選び，理由をつけて答えよ.

a）1km　　b）100km　　c）地球から月までの距離（約 38 万 km）

d）地球から太陽までの距離（約 1.5×10^{11}m）　　e）1 光年（約 9.5×10^{15}m）

$2^{10} = 1024$ cm を $10^3 = 1000$ cm で近似すると，$2^{60} = (2^{10})^6 \fallingdotseq (10^3)^6 = 10^{18}$ cm となる. 100cm=1m であることを考えると，2^{60} cm は約 10^{16} m である. 一方，1 光年は 9.5 を約 10 と見なすと，約 $10 \times 10^{15} = 10^{16}$ m となり，2^{60} cm に一番近いのは，e) の 1 光年であることがわかる.

$\boxed{11}$ 星の見かけの明るさは 1 等星，2 等星，$\cdots$，など，等級で表す. 星の等級と明るさの関係は，次のように対数を用いて表すことができる. m 等星の明るさを L_m，n 等星の明るさ L_n とすると,

$$0.4(n - m) = \log_{10} L_m - \log_{10} L_n$$

が成り立つ.

a) 1 等星の明るさは 6 等星の明るさの何倍であるか.

上式で $m = 1$，$n = 6$ とおくと

$$0.4(6 - 1) = \log_{10} L_1 - \log_{10} L_6 \Leftrightarrow 2 = \log_{10} \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow 10^2 = \frac{L_1}{L_6} \Leftrightarrow L_1 = 100 L_6$$

すなわち，1 等星の明るさは 6 等星の明るさの 100 倍.

b) 北極星は 2.0 等星である. 北極星の 2 倍の明るさを持つ星は何等星となるか.

北極星の 2 倍の明るさを持つ星を m 等星とすると，$\dfrac{L_m}{L_2} = 2$ が成り立つ. 一方，上式で $n = 2$ とおいた式より，$\log_{10} \dfrac{L_m}{L_2} = 0.4(2 - m)$ が成り立つ. これより,

$$\log_{10} 2 = 0.4(2 - m) \Leftrightarrow m = 20 = 2 - \frac{\log_{10} 2}{0.4} \fallingdotseq 2 - \frac{0.3010}{0.4} = 1.2475$$

したがって，北極星の 2 倍の明るさを持つ星は約 1.25 等星

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)