

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 次のそれぞれの値を求めよ.

a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

b) $\log_{25} 5 = \log_{25} 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

d) $\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

e) $\log_5 5 = 1$

f) $\log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

g) $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

h) $\log_8 \sqrt{2} = \log_8 \sqrt{8^{\frac{1}{3}}} = \log_8 8^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

2 次の式の x を求めよ.

a) $\log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$

b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

$x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

c) $\log_3 x = 2$

$x = 3^2 = 9$

d) $\log_{27} x = 3$

$x = 27^3 = (3^3)^3 = 3^9 (= 19683)$

3 対数の定義により, $\log_a M = r$, $\log_a N = s$ であるとは $M = a^r$, $N = a^s$ が成り立つことに他ならない. そこで, $M = a^r$, $N = a^s$ とおき, 指数法則を利用して, 次の各々の対数の性質を証明せよ.

a) $\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$

(左辺) $= \log_a (a^r \times a^s)$

$= \log_a a^{r+s}$ (∵ 指数法則)

$= r + s$ (∵ 対数の定義)

$= \log_a M + \log_a N$

$=$ (右辺)

b) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(左辺) $= \log_a \left(\frac{a^r}{a^s}\right)$

$= \log_a a^{r-s}$ (∵ 指数法則)

$= r - s$ (∵ 対数の定義)

$= \log_a M - \log_a N$

$=$ (右辺)

c) $\log_a M^n = n \log_a M$

(左辺) $= \log_a (a^r)^n$

$= \log_a a^{nr}$ (∵ 指数法則)

$= nr$ (∵ 対数の定義)

$= n \log_a M$

$=$ (右辺)

4 $p = \log_a 2$, $q = \log_a 3$ とするとき, 次の値を p , q で表せ.

a) $\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3 \log_a 2 = 3p$

b) $\log_a 18 = \log_a (2 \times 3^2) = p + 2q$

c) $\log_a 12 = \log_a (2^2 \times 3) = 2p + q$

d) $\log_a 1.5 = \log_a \frac{3}{2} = \log_a 3 - \log_a 2 = q - p$

5 次の各々の式を計算せよ.

a) $\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2^2 - (\log_2 3 - \log_2 2) = -2 + 1 = -1$

b) $\frac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{2} \log_3 5 - \left(\frac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 3\right) = 1$

c) $\log_2 (3 + \sqrt{5}) + \log_2 (3 - \sqrt{5}) = \log_2 ((3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})) = \log_2 (9 - 5) = \log_2 4 = 2$

d) $3 \log_5 15 - \log_5 135 = 3(\log_5 3 + \log_5 5) - \log_5 (27 \times 5) = 3(\log_5 3 + 1) - (3 \log_5 3 + 1) = 2$

6 次の各々の式を簡単にせよ.

a) $\frac{1}{3} \log_{10} 125 + \log_{10} \frac{3}{5} - \log_{10} 0.3 = \frac{1}{3} \log_{10} 5^3 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - \log_{10} \frac{3}{10}$
 $= \log_{10} 5 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - (\log_{10} 3 - \log_{10} 10) = 1$

b) $\log_a \frac{A}{B} + \log_a \frac{B}{C} + \log_a \frac{C}{A} = \log_a \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{A}\right) = \log_a 1 = 0$

7 対数の定義により, $a^{\log_a b} = b$ が成り立つ. この式の両辺の c を底とする対数を取ることににより, $\log_a b$ を $\log_c a$ と $\log_c b$ で表せ. [得られた式は底の変換公式と呼ばれる.]

$a^{\log_a b} = b$ の両辺の \log_c をとり $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$. これより $(\log_a b) \log_c a = \log_c b$.

$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

8 $\log_2 3 = m$ のとき, $\log_4 6$, $\log_3 2$ を m で表せ.

a) $\log_4 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{2} = \frac{1 + m}{2}$ b) $\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{m}$

9 底の変換公式を用いて次の式を簡単にせよ.

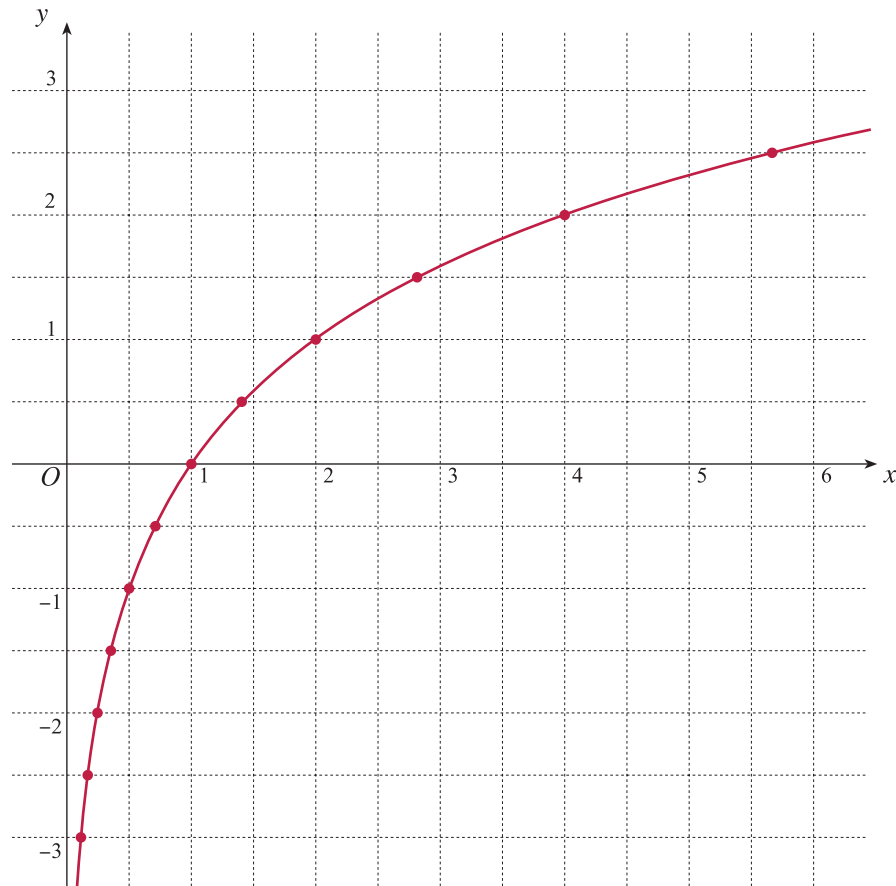
a) $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a b \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} = 1$

b) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1$

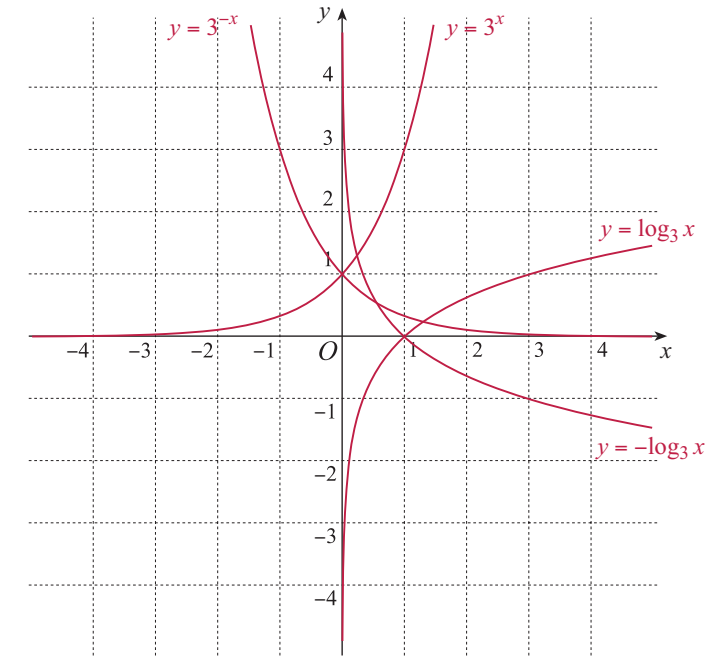
10 関数 $y = \log_2 x$ について次の表にあてはまる x の値を小数で表せ. ただし, $2^{0.5} = 1.414$ とする.

x	0.125	0.177	0.25	0.354	0.5	0.707	1	1.414	2	2.828	4	5.656	8
y	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

11 前問を利用して, 指数関数 $y = \log_2 x$ のグラフをできる限り丁寧に描け.



12 4つの関数 $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$, $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$ のグラフを描け.



13 2^{32} は何桁の整数か. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

$$\log_{10} 2^{32} = 32 \log_{10} 2 \approx 32 \times 0.3010 = 9.632 \text{ なので,}$$

$$\log_{10} 10^9 < \log_{10} 2^{32} < \log_{10} 10^{10}$$

が成り立つ. これは 2^{32} が 10 桁の数であることを示している.

14 光線が, ある種のガラスを 1 枚透過するごとに, その光度の $\frac{1}{10}$ を失うという. このガラスを何枚以上重ねたものを透過すると, 光度がもとの $\frac{1}{3}$ 以下に弱められるか. ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

1 枚投下するごとに光度は $\left(\frac{9}{10}\right)$ になるので, n 枚重ねたガラスを投下すると光度は元の $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ になる. これが $\frac{1}{3}$ 以下になればよい.

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{10}\right)^n &\leq \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \log_{10} \frac{1}{3} \Rightarrow n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) \leq -\log_{10} 3 \\ &\Rightarrow n(2 \log_{10} 3 - 1) \leq -\log_{10} 3 \\ &\Rightarrow n \geq \frac{-\log_{10} 3}{2 \log_{10} 3 - 1} = \frac{-0.4771}{-0.0458} = 10.42 \dots \end{aligned}$$

よって 11 枚以上投下すると光度が $\frac{1}{3}$ 以下になる.