2023 年 7 月 21 日

基礎数学 A1	入学年度		学部	学 科		組		番 号		検	氏 名	
金曜２限 担当: 鍬田 政人												

• 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

$\boxed{1}$ 次の式を展開せよ．

$(x^2-xy-y^2)(x^2+xy-y^2) = x^4-3x^2y^2+y^4$

$\boxed{2}$ 次の各式を因数分解せよ．

a) $54x^3-2 = 2(3x-1)(9x^2+3x+1)$

b) $a^2-\frac{10}{3}ab+b^2 = \frac{1}{3}(a-3b)(3a-b)$

$\boxed{3}$ $P(x)=x^3-8,\ \ Q(x)=x^3-x^2-2x-12$ とする．

a) $P(x)$ を因数分解せよ．

$P(x) = (x-2)(x^2+2x+4)$

b) $Q(3)$ を求めよ

$Q(3) = 27-9-6-12 = 0$

c) $Q(x)$ を因数分解せよ．

$Q(x) = (x-3)(x^2+2x+4)$

d) $P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．

最大公約数 $= x^2+2x+4$

最小公倍数 $= (x-3)(x-2)(x^2+2x+4)$

$\boxed{4}$ a) 次の除法を行い，商と余りを求めよ．

$$2x^2-x-1\ \big)\ x^4\ -\ x^3\ +\ x^2\qquad -1$$

商 $= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}$　　　余り $= \frac{3}{8}x-\frac{3}{8}$

b) 上の結果を利用して次の分数式を，整式と分子が分母より低次の分数式との和の形に表せ．

$$\frac{x^4-x^3+x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}+\frac{\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}}{2x^2-x-1}$$

$\boxed{5}$ 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $\dfrac{6abc}{\frac{3b^2c}{4a}} = \dfrac{8a^2}{b}$

b) $\dfrac{4\frac{a}{bc}}{6\left(\frac{a}{bc}\right)^2-2\frac{a}{bc}} = \dfrac{2bc}{3a-bc}$

c) $\dfrac{3x+y}{x^2-xy-6y^2}-\dfrac{x-y}{x^2-5xy+6y^2}$

$= \dfrac{2x}{(x-2y)(x+2y)}$

d) $\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2} \div \dfrac{a^3+a^2b+ab^2}{a^2+2ab+b^2} \times \dfrac{a^2b-ab^2}{a^2b-b^3}$

$= \dfrac{a-b}{a+b}$

e) $\dfrac{h}{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}} = -a(a+h)$

$\boxed{6}$ 次の不等式を解け．またその解を数直線上に表せ．

a) $\begin{cases} 2x^2-x-3 \geqq 0 \\ \dfrac{2x-1}{3} > \dfrac{3x-2}{4} \end{cases}$

$2x^2-x-3 \geqq 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+1) \geqq x \leqq 1$

$\Leftrightarrow x \leqq -1$ または $x \geqq \frac{3}{2}$

$\frac{2x-1}{3} > \frac{3x-2}{4} \Leftrightarrow 8x-4 > 9x-6 \Leftrightarrow x < 2$

$x \leqq -1$ または $\frac{3}{2} \leqq x < 2$

b) $|3x-2| \geqq 4$

$|3x-2| \geqq 4 \Leftrightarrow 3x-2 \leqq -4$ または $3x-2 \geqq 4$

$x \leqq -\frac{2}{3}$ または $x \geqq 2$

$\boxed{7}$ a）放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ は，放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ をどのように平行移動したものかを述べよ．

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-3)^2 + \dfrac{7}{2}$ だから，
放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ は，放物線 $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ を
x 軸方向に $+3$，y 軸方向に $+\dfrac{7}{2}$ だけ平行移動したもの．

b) 2 次関数 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値，最小値を求めよ．

最大値： $\dfrac{7}{2}$ $(x = 3)$
最小値： -1 $(x = 0)$

$\boxed{8}$ 2 次方程式 $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4} = 0$ を解け．

$\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 2\cdot 3}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$

$\boxed{9}$ 周囲の長さ 24cm の長方形において，短い方の辺の長さを x とする．

a) 長い方の辺の長さを x で表せ．長い方の辺の長さが，短い方の辺の長さよりも大きいという条件を考慮して，x の取り得る範囲を求めよ．

長い方の辺の長さ $= \dfrac{1}{2}(24 - 2x) = 12 - x$.
どちらの辺の長さも正数でなければならないから，$x > 0$，$12 - x > 0$.
さらに，短い辺の長さ $<$ 長い辺の長さ より，$x < 12 - x \quad \Leftrightarrow x < 6$.
以上より，$0 < x < 6$

b) この長方形の面積が 25 cm^2 以上 30 cm^2 未満であるようにするには，長方形の短い方の辺の長さをどのようにすればよいか．

$25 \leqq x(12 - x) < 30$ を解く．
$x^2 - 12x + 25 \leqq 0 \Leftrightarrow 6 - \sqrt{11} \leqq x \leqq 6 + \sqrt{11}$
$x^2 - 12x + 30 > 0 \Leftrightarrow 6 - \sqrt{6} < x$ または $x > 6 + \sqrt{6}$
$0 < x < 6$ と合わせて，$6 - \sqrt{11} \leqq x < 6 - \sqrt{6}$

$\boxed{10}$ 1 杯の原価が 100 円のカフェラテを，1 杯 320 円で売ると，毎日 120 杯の売り上げがある．もし値上げをすれば，1 杯 10 円の値上げにつき 5 杯の割合で、売り上げが減少するという．利益を最大にするには，1 杯いくらで販売すればよいか．

x 円値上げするとする．このとき，売り上げは $120 - \dfrac{1}{2}x$ 杯になるので，

利益 $= (320 + x - 100)\left(120 - \dfrac{1}{2}\right)$

$\quad = -\dfrac{1}{2}(x - 10)^2 + 26450$

したがって，10 円値上げしたとき，すなわち，
売価が 330 円のとき利益が最大になる．

$\boxed{11}$ 次の各々の式を簡単にせよ．ただし，a，b は正の定数とする．

a) $\sqrt[3]{-\sqrt{a^6}} = -a$

b) $\sqrt{ab^3} \div \sqrt[6]{ab^5} \times \sqrt[3]{a^2b} = ab$

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{4}}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$

e) $a^{2\log_a 3} = 9$

f) $\dfrac{1}{2}\log_{10} 6 + \log_{10}\sqrt{3} - \log_{10}\sqrt{18} = 0$

g) $\log_3(4 + \sqrt{7}) + \log_3(4 - \sqrt{7}) = 2$

$\boxed{12}$ $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$ を小さいものから順に並べよ．

$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$，$(\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9$ より，$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$
$(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$，$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25$ より，$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$.
以上より，$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

$\boxed{13}$ あるお店では売り尽くしセールとして，その日に売れなかった商品を次の日にさらに 20%OFF で売ることにした．商品の値段が元の $\dfrac{1}{10}$ 以下になるのは何日売れ残ったときか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ として答えよ．

$\left(\dfrac{8}{10}\right)^n \leqq \dfrac{1}{10}$ を解く．
両辺の $\log_{10}$ をとって，

$\log_{10}\left(\dfrac{8}{10}\right)^n < \log_{10}\dfrac{1}{10}$
$\Leftrightarrow n(3\log_{10} 2 - 1) < -1$
$\Leftrightarrow n(3 \times 0.3010 - 1) < -1$
$\Leftrightarrow -0.09691n < -1$
$n > \Leftrightarrow 10.3189$

よって，11 日売れ残ったとき．

【2 枚目につづく】

2023 年 7 月 21 日

基礎数学 A1	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人													

$\boxed{14}$ 次の極限値を求めよ.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x+1)}{(x-3)} = -\frac{3}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}} = \lim_{x\to1}(1-x) = 0$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x) = (3x+2)^2$ について, 以下の問いに答えよ.

a) $x=-1$ から $x=-1+h$ まで変化したときの $f(x)$ の平均変化率をなるべく簡単な形で表せ.

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+3h)^2-1}{h} = -6+9h$$

b) $f(x)$ の $x=-1$ における微分係数 $f'(-1)$ を a) で求めた平均変化率の極限として求めよ.

$$f'(-1) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to0}(-6+9h) = -6$$

$\boxed{16}$ $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x + 1$ とする. 以下の問いに答えよ.

a) x が -1 から 1 まで変化したときの平均変化率を求めよ.

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = 2$$

b) $f(x)$ の導関数を求めよ. (定義に従って計算する必要はない.)

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ.

$f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}(3x+5)(x-1) = 0$ より,

$x = -\dfrac{5}{3}$, $x = 1$.

d) $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(3x+5)(x-1) > 0$ より,

$-\dfrac{5}{3} < x < 1$.

e) $f(x)$ の増減表を完成させ, $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ.

x	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{121}{54}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$

極大値 $= \dfrac{5}{2}$ 　　　　極小値 $= -\dfrac{121}{54}$

f) $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ をそれぞれ求めよ.

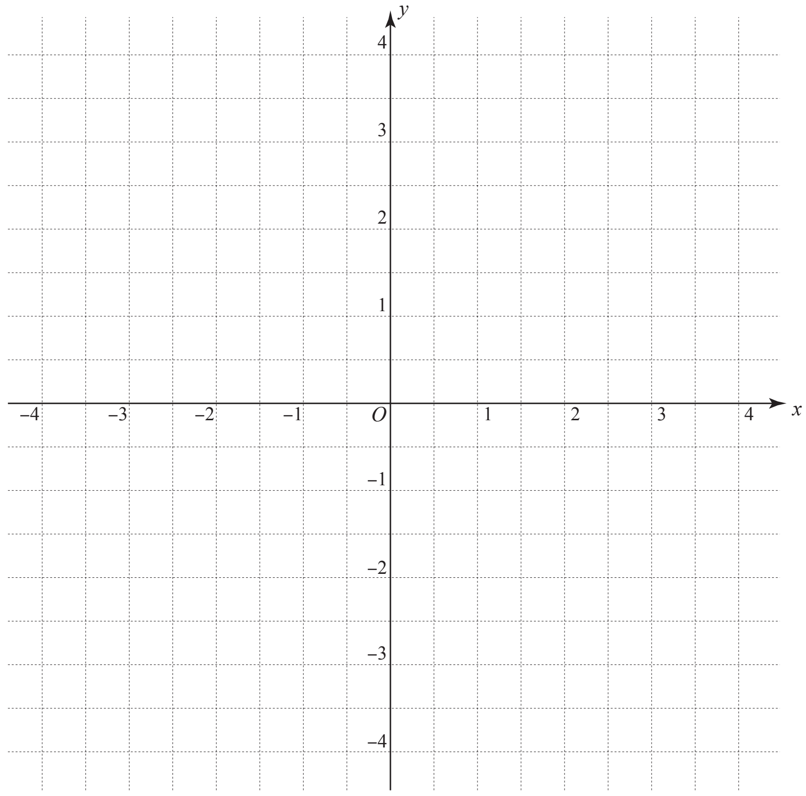
$f(-4) = 15$ 　　　 $f(0) = 1$

$f(-3) = \dfrac{5}{2}$ 　　　 $f(1) = \dfrac{5}{2}$

$f(-2) = -2$ 　　　 $f(2) = 0$

$f(-1) = -\dfrac{3}{2}$ 　　　 $f(3) = -\dfrac{19}{2}$

g) ここまでの結果を反映させ, $y = f(x)$ のグラフと, $(2, f(2))$ における接線をのグラフをなるべく丁寧に描け.



【以上】

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】