

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 次の計算をせよ.

a) $\frac{5x^2}{10x^3} = \frac{1}{2x}$

b) $\frac{8xy^3}{12x^2y^2} = \frac{2y}{3x}$

c) $\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{y} = \frac{x}{y}$

d) $\frac{a}{x} \div \frac{a^2}{x^2} = \frac{a}{x} \times \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a}$

e) $\frac{3abc}{2a^2} \times \frac{8a}{9b^2c} = \frac{4}{3b}$

f) $\frac{ab}{xy} \times \frac{y^2}{x^2} \div \frac{bc}{y} = \frac{ay^2}{cx^3}$

2 次の分数式を約分せよ.

a) $\frac{2x}{6x^2 - x} = \frac{2}{6x - 1}$

b) $\frac{6x^2 + 6ax}{3a^2x} = \frac{2(x + a)}{a^2}$

c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x}$

d) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x+1}{x-2}$

e) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2 - x + 1)}{x(x-1)}$

f) $\frac{a^3 + 3a^2b - 4ab^2}{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \frac{a(a-b)(a+4b)}{2(a-b)^2} = \frac{a(a+4b)}{2(a-b)}$

3 次の計算をせよ.

a) $\frac{x}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x} = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)x(x+2)} = \frac{x-2}{(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{2x + 4}{x^2 + x - 12} \times \frac{x - 3}{x^2 + 6x + 8} = \frac{2(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+4)(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+4)^2}$

c) $\frac{x-4}{x-2} \div \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} = \frac{x-4}{x-2} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x+2}{x-1}$

d) $\frac{x^2 - 9}{x + 2} \div (x^2 - x - 6) = \frac{(x-3)(x+3)}{x+2} \times \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{x+3}{(x+2)^2}$

4 次の各組の式を因数分解し、最大公約数と最小公倍数を求めよ.

a) $\begin{cases} x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \\ x^2 + 4x + 4 = (x-2)^2 \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = x + 2 \\ \text{最小公倍数} = (x-2)(x+2)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \\ x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = x + 1 \\ \text{最小公倍数} = (x-2)(x+1)(x^2 - x + 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \\ x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2 \\ x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1) \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = (x-1)(x+1) \\ \text{最小公倍数} = (x-1)^2(x+1)^2 \end{cases}$

5 次の計算をせよ.

a) $\frac{2x}{x+5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{2x - (x-5)}{x+5} = \frac{x+5}{x+5} = 1$

b) $\frac{x-2}{2x} + \frac{x+3}{3x} = \frac{3(x-2) + 2(x+3)}{6x} = \frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2 - a} - \frac{2}{a^2 - 1} = \frac{(a^2 - 1) + (a+1) - 2a}{a(a-1)(a+1)} = \frac{a^2 - a}{a(a-1)(a+1)} = \frac{a(a-1)}{a(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a+1}$

e) $\frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x^2 + x} = \frac{4x^2 - (x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(3x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{x(x-1)}$

6 a) $x^2 + 2xy - 3y^2$ を因数分解せよ. $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x-y)(x+3y)$

b) 上の結果を用い、次の式を計算せよ.

$\frac{x-y}{x^2 + 2xy - 3y^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{7}{x+3y} = \frac{(x-y) - 2(x+3y) - 7(x-y)}{(x-y)(x+3y)} = \frac{-8x}{(x-y)(x+3y)}$

7] 次の計算をせよ。

$$\text{a) } \frac{c}{ab^2c} = \frac{c}{ab} \div ab^2c = \frac{c}{ab} \times \frac{1}{ab^2c} = \frac{1}{a^2b^3} \quad \text{b) } \frac{bc}{\frac{ad}{b^2}} = \frac{bc}{ad} \div \frac{b^2}{a} = \frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b^2} = \frac{c}{bd}$$

$$\text{c) } \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{(x+1)-1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x} \quad \text{d) } \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{e) } \frac{x+3}{1 + \frac{1}{x+2}} + \frac{x-2}{1 - \frac{1}{x-1}} = \frac{x+3}{\frac{x+3}{x+2}} + \frac{x-2}{\frac{x-2}{x-1}} = (x+2) + (x-1) = 2x+1$$

8] 次の計算をせよ。

$$\text{a) } \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right) \div \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 - y^3}{xy} \div \frac{x-y}{xy} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy} \cdot \frac{xy}{x-y} = x^2 + xy + y^2$$

$$\text{b) } \frac{1}{x+2} + \frac{x}{2-x} + \frac{x+6}{x^2-4} = \frac{(x-2) - x(x+2) + (x+6)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x^2+4}{(x-2)(x+2)} = -1$$

$$\text{c) } \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x-y) + y(x+y) - (x^2+y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{0}{(x-y)(x+y)} = 0$$

$$\text{d) } \frac{1}{x} - \frac{y}{x(x+y)} - \frac{z}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{(x+y) - y}{x(x+y)} - \frac{z}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{1}{x+y} - \frac{z}{(x+y)(x+y+z)}$$

$$\text{e) } \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(b+c)(b+a)} + \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} = \frac{(b-c)(b+c) + (c-a)(c+a) + (a-b)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

9] ある川にそって、 a km 離れている 2 地点 A, B がある。川下の A 地点から川上の B 地点まで船で往復するとき、船の静水での速さを毎時 u km, 川の流の速さを毎時 v km ($v < u$) とし、次の間に答えよ。 [ヒント: A 地点から B 地点までさかのぼる速さは $(u-v)$ km/時, B 地点から A 地点までくだる速さは $(u+v)$ km/時]

a) 往復にかかる時間を求めよ。

往路にかかる時間: $\frac{a}{u-v}$ (時間), 復路にかかる時間: $\frac{a}{u+v}$ (時間).
よって、往復には、 $\frac{a}{u-v} + \frac{a}{u+v} = \frac{2au}{(u-v)(u+v)}$ (時間) かかる。

b) 往復の平均の速さを求めよ。

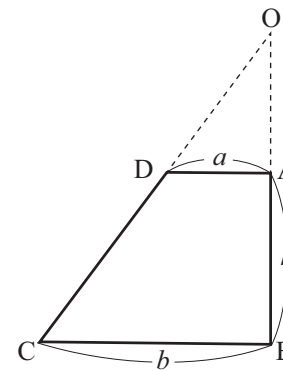
平均の速さ = (往復の距離) ÷ (往復にかかった時間) = $2a \div \frac{2au}{(u-v)(u+v)} = \frac{(u-v)(u+v)}{u}$ (時間)

c) b) で求めた平均の速さと、この船の静水での速さをくらべるとどちらが速いか。

(b) で求めた平均の速さ) - (静水での速さ) = $\frac{(u-v)(u+v)}{u} - u = u - \frac{v}{u} - u = -\frac{v}{u} < 0$
よって、静水での速さの方が速い。

10]

図のような台形 ABCD を、AB のまわりに回転してできる立体 (円錐台) の体積を、次の順に考えて求めよ。



a) OA の長さを a, b, h で表せ。 [ヒント: $OA = x$ とおき、 $\triangle OAD \sim \triangle OBC$ を用いる.]

$\triangle OAD \sim \triangle OBC$ より、 $OA : OB = AD : BC$.
 $OA = x$ とおくと、 $x : (x+h) = a : b$ となり、 x についての方程式 $a(x+h) = bx$ が得られる。これを x について解くと、 $x = \frac{ah}{b-a}$.
したがって、 $OA = \frac{ah}{b-a}$.

b) OB の長さを a, b, h を用いて、なるべく簡単な形に表せ。

$$OB = x + h = \frac{ah}{b-a} + h = \frac{ah + h(b-a)}{b-a} = \frac{bh}{b-a}$$

c) 台形 ABCD を AB のまわりに回転してでき円錐台の体積を、BC と AD をそれぞれ底面の半径とする 2 つの円錐の体積の差として求め、それをなるべく簡単な形で表せ。

$$\triangle OCB \text{ を回転してできる円錐の体積} = \frac{\pi}{3} BC^2 \cdot OB = \frac{\pi}{3} b^2 \cdot \frac{bh}{b-a} = \frac{\pi}{3} \frac{b^3h}{b-a}$$

$$\triangle ODA \text{ を回転してできる円錐の体積} = \frac{\pi}{3} DA^2 \cdot OA = \frac{\pi}{3} a^2 \cdot \frac{ah}{b-a} = \frac{\pi}{3} \frac{a^3h}{b-a}$$

よって、求める円錐台の体積は

$$\frac{\pi}{3} \frac{b^3h}{b-a} - \frac{\pi}{3} \frac{a^3h}{b-a} = \frac{\pi}{3} \frac{(b^3 - a^3)h}{b-a} = \frac{\pi}{3} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)h}{b-a} = \frac{\pi}{3} (a^2 + ab + b^2)h$$