入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
2	3	B		1						氏名	

$\boxed{1}$ $a \neq b$ とするとき，x についての次の 2 次方程式を考える．

$$\begin{vmatrix} 1 & a^0+b^0 & a^1+b^1 \\ x & a^1+b^1 & a^2+b^2 \\ x^2 & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = 0$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$，とおくとき，上の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & a^0+b^0 & a^1+b^1 \\ x & a^1+b^1 & a^2+b^2 \\ x^2 & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = \vec{x} \wedge (\vec{a}+\vec{b}) \wedge (a\vec{a}+b\vec{b})$$

と表せる．この式の右辺を交代積の性質を用いて展開することにより，

$$\vec{x} \wedge (\vec{a}+\vec{b}) \wedge (a \cdot \vec{a} + b \cdot \vec{b}) = (b-a)\big(\vec{x} \wedge \vec{a} \wedge \vec{b}\big)$$

となることを示せ．

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^0+b^0 & a^1+b^1 \\ x & a^1+b^1 & a^2+b^2 \\ x^2 & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ であることを示し，問題の 2 次方程式は $x = a$ と $x = b$ を解として持つことを示せ．

c) 2 次方程式 $\begin{vmatrix} 1 & \beta^0+\beta^0 & \beta^k+\beta^l \\ x & \beta^k+\beta^l & \beta^{2k}+\beta^{2l} \\ x^2 & \beta^{2k}+\beta^{2l} & \beta^{3k}+\beta^{3l} \end{vmatrix}$ は $x = \beta^k$ と $x = \beta^l$ を解として持つことを示せ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{F}_{16}$ は $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ に $\beta^4 + \beta + 1 = 0$ をみたす数を付け加えて得られるのであった．いま，

$$g(x) = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

とおく．

a) $g(\beta) = g(\beta^2) = g(\beta^3) = 0$ であることを示せ．

b) $g(x)$ を用いて 15 次の送信多項式 $u(x)$ を

$$u(x) = q(x)x^8 + \bigl(q(x)x^8 \text{ を } g(x) \text{ で割った余り}\bigr)$$

で定義すると，$u(\beta) = u(\beta^2) = u(\beta^3) = 0$ となる．いま，受信多項式 $r(x)$ は 2 つの誤りを含み，

$$r(x) = u(x) + x^k + x^l, \quad k \neq l$$

とかけたとする．このとき，シンドローム $s_i, i = 0, \ldots, 3$ を

$$s_0 = r(\beta^0), \quad s_1 = r(\beta^1), \quad s_2 = r(\beta^3), \quad s_2 = r(\beta^2)$$

と定義する．このとき，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_1 \\ x & s_1 & s_2 \\ x^2 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0$$

で定義される 2 次方程式は β^k と β^l を解に持つことを示せ．