12 ❦ 行列式　　2023年度　総合教育科目演習 I（木２限）

入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
2	3	B		1							氏 名	

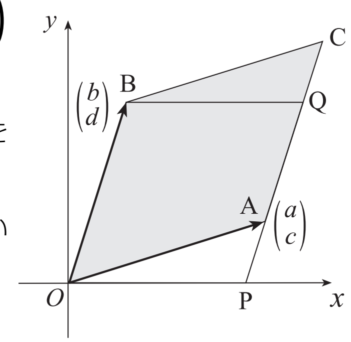
1　2 つの平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について「交代積」呼ばれる積 $\vec{a} \wedge \vec{b}$ が定義される．ベクトルの内積同様，交代積の値はスカラー（実数）である．交代積「$\wedge$」は以下の性質を持つ．

1. 【定数倍】　$(k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) = k(\vec{a} \wedge \vec{b})$
2. 【分配法則】$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \wedge \vec{b} = \vec{a}_1 \wedge \vec{b} + \vec{a}_2 \wedge \vec{b}$，　$\vec{a} \wedge (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \wedge \vec{b}_1 + \vec{a} \wedge \vec{b}_2$
3. 【交代性】　（2 つの項を入れ替えると符号が変わる.）$\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$
4. 【正規性】　（単位正方形の体積は 1.）$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = 1$

a)　交代性を用い，$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ であることを示せ．

b)　分配法則を用いて $(a\vec{e}_1 + c\vec{e}_2) \wedge (b\vec{e}_1 + d\vec{e}_2)$ を展開し，その他の性質を用いて $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ であることを示せ．

2　右の図のような平行四辺形 OACB がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であるとする．



a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が成り立つように k を定め，p の値をもとめよ．

b)　平行四辺形 OACB の面積は平行四辺形 OPQB の面積と等しいことに注意して平行四辺形 OACB の面積を求めよ．

c)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ 3 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について「交代積」呼ばれる積 $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ が定義される．交代積の値はスカラー（実数）であり，以下の性質を持つ．

1. 【定数倍】 $(k\vec{a}) \wedge \vec{c} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (k\vec{c}) = k(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
2. 【分配法則】 $(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a_1} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{a_2} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$
   $\vec{a} \wedge (\vec{b_1} + \vec{b_2}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b_1} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{b_2} \wedge \vec{c}$
   $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (\vec{c_1} + \vec{c_2}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c_1} + \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c_2}$
3. 【交代性】 （2 つの項を入れ替えると符号が変わる．）
   $\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{c} = -(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})$
4. 【正規性】 （単位正方形の体積は 1．）
   $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とするとき，$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1.$

a) 交代性を用い，$\vec{a} \wedge \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ であることを示せ．

b) $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$，$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$，$\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ とおくとき，
3 次の行列式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \wedge (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \wedge (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3)$$

と定義する．交代積の分配法則を用いて右辺を展開し，その他の性質を用いてなるべく簡単にせよ．