Gauss の消去法，あるいは掃き出し法とは連立方程式の解を系統的に求める（あるいは解がないことを示す）計算手順である．この方法を機械的に適用することにより，誰がやっても同じ解が得られるし，解がない場合でも堂々巡りをすることなく，解がないことを明確に判定できる．以下では，例を用いながら，その手順を説明する．ここでは，解を素早く求めることよりも，解が求まる仕組みを理解することがポイントであることに注意して欲しい．

$$\begin{cases} \phantom{-2x+{}} 2y - 6z + 4w = -2 \\ 2x + 2y - 4z \phantom{{}+3w} = 2 \\ -2x - y + z + 3w = -1 \\ 3x + 2y - 3z - 5w = -2 \end{cases}$$

ステップ 0：連立方程式を行列表示する．

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

ステップ 1：すべての成分が 0 でない列のうち，最も左の列に注目する．

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{array}\right) \\ \uparrow \\ \text{注目} \end{array}$$

ステップ 2：ステップ 1 で注目した列の一番上の成分が 0 のときは，0 でない数を含む行と 1 番上の行とを入れ替える．

$$\xrightarrow{\text{①} \leftrightarrows \text{②}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

ステップ 3：ステップ 1 で注目した列の一番上の成分を a とするとき，第 1 行を $1/a$ 倍し，一番上の成分を Pivot とし，丸印をつける．

$$\xrightarrow{\text{①} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \text{①} & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

注　この例ではたまたま 1 行目がすべて偶数なので問題ないが, a が 1 でない場合，$1/a$ 倍することによって成分が分数になってしまい，計算が面倒になることがある．そのため，このステップを後回しにし，一番最後に Pivot を $1/a$ 倍する流儀もある．どちらを選ぶかは好みの問題．

ステップ 4：Pivot を用いて Pivot より下の成分をすべて 0 にする．

$$\xrightarrow{\substack{\text{③} + \text{①} \times 2 \\ \text{④} + \text{①} \times (-3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} \text{①} & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

注　ここまでで，許される操作をまとめると，次のようになる．これらの操作を**行に関する基本変形**と呼ぶ．

(1) ある行と他の行を入れ替える．
(2) ある行を c 倍する．ただし，$c \neq 0$．
(3) ある行に他の行の c 倍を加える．

ここで，たとえば 1 行目を 2 倍して 2 行目を 3 倍して加えるといった操作は 2 段階の操作であり，まとめて 1 度で行うと間違いのもととなるので注意．

ステップ 5 : 第 1 行と第 1 列を忘れて，残った行列について，ステップ 1 に戻り，これを繰り返す．

$$
\xrightarrow{\text{②}\times\frac{1}{2}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & -1 & 3 & -5 & -5
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{\text{③}+\text{②}\times(-1) \\ \text{④}+\text{②}\times 2}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -6
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \uparrow \\
 & & & \text{注目}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\text{そのまま}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -6
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{④}+\text{③}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

ここまでの操作を「前進消去」ということがある．このときできた下の行列は，0 が左下に階段状に並んでおり，「簡約階段行列」と呼ばれる．

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

この一番下の行は，方程式としては $0 = 0$ という自明な方程式を表しており，実質的な方程式の数が 1 つ減ったことを意味する．もし一番右下の 0 が 0 以外の値であったとすると，一番下の行は，$0 = 0$ 以外の値 となって矛盾が導かれ，この時点で方程式に解がないことが結論される．

ステップ 6 : Pivot を用いて Pivot より上の成分をすべて 0 にする．

$$
\xrightarrow{\text{②}+\text{③}\times(-2)}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\times(-1)}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 1 & -3 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

この最後の行列をもとの連立方程式の形に戻すと次のようになる．

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & & & + & z & & & = & 6 \\
 & & y & - & 3z & & & = & -5 \\
 & & & & & & w & = & 2 \\
 & & & & & & 0 & = & 0
\end{array}\right.
$$

もともと 4 つあった方程式が実質 3 つに減っているので，解は一意的には定まらない．そこで，Pivot のない列（第 3 列）に対応する未知数 z を t とおく．（t はパラメータと呼ばれ，実数全体を動く．）結局，解は以下のように表される．

$$
\left\{\begin{array}{rcrcr}
x & = & 6 & - & t \\
y & = & -5 & + & 3t \\
z & = & & & t \\
w & = & 2 & &
\end{array}\right.
\qquad (t \text{ は任意の実数})
$$