

### 5. Lagrange の乗数法

点  $(x, y)$  が、条件  $g(x, y) = 0$  をみたしつつ変化するとき、関数  $z = f(x, y)$  の極値を求めたい。いま、点  $(a, b)$  で  $f(x, y)$  が極値を持つとすると、2つのベクトル  $(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$  と  $(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b))$  が平行となることが示せる。これは、実数  $\lambda$  (ラムダ) を用いて

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \right)$$

と表せることにほかならない。そこで、このような条件付き極値問題を考えるとき、新たに第3の変数  $\lambda$  を導入し、3変数関数  $L(x, y, \lambda)$  を  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  を考えると、もとの条件付きの問題がこの関数  $L(x, y, \lambda)$  の条件なしの極値問題に言い換えられることがわかる。正確には以下の通り。

#### 条件付極値問題

拘束条件  $g(x, y) = 0$  の下で、関数  $f(x, y)$  の極値を求めたい。このとき、新たに第3の変数  $\lambda$  を導入し、3変数関数  $L(x, y, \lambda)$  を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

と定義する。(  $\lambda$  は Lagrange の乗数と呼ばれ  $L(x, y, \lambda)$  は Lagrange 関数と呼ばれる。 ) このとき、 $L(x, y, \lambda)$  の(無条件での)極値を求めると、 $g(x, y) = 0$  の下での  $f(x, y)$  の極値が求まる。したがって、極値を求めるには

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

**例題** 直線  $y = 2x + 3$  上の点と原点  $O$  との距離の最小値を求めよ。

**解** 原点との距離が最小になることと、距離の2乗が最小になることは同値なので、拘束条件  $g(x, y) = y - 2x - 3 = 0$  の下で、距離  $d$  の2乗  $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$  が最小値となる  $(x, y)$  を求めればよい。そこで、Lagrange 関数を

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 - \lambda(y - 2x - 3)$$

と定義し、各々の偏微分を計算して、それらがすべて0になる点を求める。

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(-2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(y - 2x - 3) = 0 \end{cases}$$

第2式を $\lambda$ について解き、第1式に代入して整理すると

$$2x + 4y = 0$$

が得られる。これと第3式を $x, y$ についての連立1次方程式と見て解くと

$$x = -\frac{6}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$$

を得る。本来、このままではこの $x, y$ で $f(x, y)$ が極小になるか極大になるかは機械的に判断できないが、この問題では図形的に容易に最小値だけが存在し、最大値が存在しないことがわかる。そこで、上の値を $f(x, y)$ に代入して、 $f(x, y)$ の最小値は $\frac{9}{5}$ となる。したがって距離の最小値は $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ である。

1 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで、 $2x^2 + 4xy + 5y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

2 【効用最大化問題】消費者の効用関数が $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ で与えられているとする。このとき、所得制約式 $p_1x + p_2y = I$ のもとで $u(x, y)$ を最大にする $(x, y)$ をLagrangeの乗数法により求めよ。

3 【費用最小化問題】消費者の効用関数 $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ をある一定レベル $u_0$ に保ち、この効用レベルで支出 $S(x, y) = p_1x + p_2y$ を最小にしたい。そのような $(x, y)$ をLagrangeの乗数法により求めよ。

4 厚紙を用いて図のような中仕切りがあるふたつきの箱をつくる。使用する厚紙の面積が一定値 $S$ であるとき、容積 $V$ が最大になるような箱の寸法を求めよ。またその時の箱の容積を求めよ。

