2. 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において，a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 h だけ変化させたときの値 $f(a+h)$ の近似値を求めることを考える．前回見たように，$f(a+h)$ は

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \tag{1}$$

と漸近展開できる．したがって，$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$ として近似値が計算できそうである．例えば，$f(x) = \sqrt{x}$ としたとき，$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，$a = 1$，$h = 0.01$ として

$$\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \fallingdotseq \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \times 0.01 = 1.005$$

となるはずである．しかし，(1) 式は $h \to 0$ としたときの極限の様子を示すに過ぎず，h がある決まった値であるときの "真の値" $f(a+h)$ と "近似値" $f(a) + f'(a)h$ との間の "誤差"

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h\big)$$

がどの程度の大きさなのかについては何も表していない．一般に，近似値を計算するとき，誤差 $\varepsilon(h)$ がどれくらいの範囲に収まっているかがわからないと近似値は本当の価値を持たない．

そこで，前回漸近展開を導いた方法をもう一度見直してみる．簡単のために $a = 0$ の場合のみを考え，関数 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする．まず，$\displaystyle\int_0^h f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_0^h = f(h) - f(0)$ を書き直した式

$$f(h) = f(0) + \int_0^h f'(x)\,dx \tag{2}$$

に部分積分を繰り返し用いて計算すと，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h - \int_0^h (x-h) f''(x)\,dx$$

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$$

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 - \frac{1}{3!}\int_0^h (x-h)^3 f^{(4)}(x)\,dx$$

$$\cdots$$

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

が得られる．ここで，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数である．これより，$f(h)$ は h の $n-1$ 次式で近似され，最後の積分が誤差であるとみることができる．このときの誤差は次のように表せる．

$$R_n(h) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

いま，$h > 0$ と仮定し，$f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，

$$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$$

をみたすとする．たとえば，$f^{(n)}(x)$ の最大値，最小値がわかれば，それらを M，m とすればよい．このとき，各辺に $(h-x)^{n-1}$ を掛けて 0 から h まで積分すると，この積分区間内で $(h-x)^{n-1} \geqq 0$ だから，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^h (h-x)^{n-1} m \, dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x) \, dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} M \, dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^h (h-x)^{n-1} m \, dx = m \int_0^h (h-x)^{n-1} \, dx = m \Big[\frac{-1}{n}(h-x)^n \Big]_0^h = \frac{m}{n} h^n$ などであるから，

$$\frac{m}{n!} h^n \leqq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x) \, dx \leqq \frac{M}{n!} h^n$$

が成り立つ．以上をまとめると次のようになる．

> $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，h を正の数とする．このとき，$f(h)$ は
>
> $$f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1}$$
>
> と近似でき，$f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$ をみたすとすると，その誤差 $R_n(h)$ は，次の不等式をみたす．
>
> $$\frac{m}{n!} h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!} h^n$$

例．$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の近似式を用いる．ここでは $n = 3$，$h = 1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2 \right) = 8.0622558\ldots$$

また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 3/8 をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが，0 以上であることはすぐにわかるり，この場合これで十分である．したがって，近似の誤差は，上の式を用いて

$$0 \leqq 8\, R_3\Big(\frac{1}{64}\Big) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\Big(\frac{1}{64}\Big)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることが結論できる．

担当： 鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)