1. 関数の漸近展開

微分の定義をもう一度振り返ってみよう．関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限によって

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と定義されるのであった．上の式の見方を変えて， $r(h)$ を平均変化率と微分係数（瞬間変化率）の差として

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=r(h) \tag{1}$$

と定義すると $\lim_{h\to 0} r(h)=0$ が成り立つ．(1) の分母を払って整理すると，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+hr(h),$$

ここで， $\varepsilon(h)=hr(h)$ とおくと、次が成り立つ．

(2) $\quad f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h),\quad$ ただし $\varepsilon(h)$ は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0$ をみたす関数.

さて，以後，関数 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数と仮定する．また，簡単のため $a=0$ とする．
$f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ であるから $\displaystyle\int_0^h f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_0^h=f(h)-f(0)$ となる．これを書き直して

$$f(h)=f(0)+\int_0^h f'(x)\,dx. \tag{3}$$

ここで，積分を（無理やり）部分積分を用いて計算する．部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ において， $u(x)=f'(x),\, v(x)=x-h$ と置くと

$$\int_0^h f'(x)\,dx=\Big[f'(x)(x-h)\Big]_0^h-\int_0^h (x-h)f''(x)\,dx=f'(0)h-\int_0^h (x-h)f''(x)\,dx. \tag{4}$$

(3) の右辺の積分を (4) の最右辺で置き換え，さらに， $u(x)=f''(x),\, v(x)=\frac{1}{2}(x-h)^2$ として，もう一度部分積分することにより，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}
f(h)&=f(0)+f'(0)h-\int_0^h (x-h)f''(x)\,dx\\
&=f(0)+f'(0)h-\left(-\frac{1}{2}f''(0)h^2-\frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx\right)\\
&=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+\frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，まず $h>0$ と仮定する． $0\leqq x\leqq h$ において連続関数 $f'''(x)$ は最大値・最小値を持つことが証明できるので，その最小値を m, 最大値を M とすると， $m\leqq f'''(x)\leqq M$ となる． $\varepsilon(h)=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$ とおいたとき，したがって， $\varepsilon(h)$ は

$$\frac{1}{2}\int_0^h m(x-h)^2\,dx=\frac{m}{2}h^3\leqq\varepsilon(h)\leqq\frac{1}{2}\int_0^h M(x-h)^2\,dx=\frac{M}{2}h^3$$

をみたす．これより，$\dfrac{m}{6}h \leqq \dfrac{\varepsilon(h)}{h^2} \leqq \dfrac{M}{6}h$ であり，$h \to 0$ としたとき，左辺右辺ともに 0 に収束するから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h^2} = 0$ である．$h < 0$ の場合も同じことが示されるので，次の式が成り立つ．

(6) $\quad f(h) = f(0) + f'(0)h + \dfrac{1}{2}f''(0)h^2 + \varepsilon(h),\qquad$ ただし $\varepsilon(h)$ は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h^2} = 0$ をみたす関数．

一般に，0 のまわりで定義された関数 $\varepsilon(h)$ が，$h \to 0$ としたとき 0 に近づくなら，すなわち $\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成り立つなら，$\varepsilon(h)$ は**無限小**であるという．例として，n が自然数のとき，関数 h^n は無限小である．また，n が大きくなればなるほど，h^n は急速に 0 に近づく．そこで，

$$\varepsilon(h)\ \text{が}\ n\ \textbf{次より高次の無限小} \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h^n} = 0$$

と定義する．(2) で $a = 0$ とおいた式，および (6) 式は

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + (1\ \text{次より高次の無限小})$$
$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + (2\ \text{次より高次の無限小})$$

と表すことができる．これらの式を「ランダウの記号 o」を用い，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + o(h)$$
$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2)$$

と表す．これらはあくまで<u>略記法</u>であって，$o(h)$、$o(h^2)$ などは実際の関数を表すものではないことに注意する．$o(h^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので，積分定数 C と似た扱いがなされる．また，$o(h^0) = o(1)$ とは単に無限小である関数，すなわち 0 のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ で，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ とをみたすもの全般をあらわす．上の議論ををさらに進めていくと，$f(x)$ が n 階微分可能であるとき，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

が成り立つことがわかる．この式はしばしば h の代わりに x と書き直して，

(7) $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

この式は，$x \to 0$ としたときの極限に関しては，$f(x)$ が，$f(x) = (n\ \text{次の多項式}) + (n\ \text{次より高次の無限小})$ と表されていることを示している．(7) の形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの**漸近展開**と呼ぶ．大雑把にいうと，$f(x)$ は $x = 0$ のまわりで多項式に「展開」でき，$o(x^n)$ は無視できる「x^{n+1} 以上の項」を一括りにしたものである．$f(x)$ の漸近展開は $x \to 0$ としたときの極限の計算に有用である．
具体例として，$f(x) = e^x$ とすると，$f^{(n)}(x) = e^x$，$f^{(n)}(0) = 1$ だから，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

下の式はその他の主な関数の漸近展開である．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)