

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 不定積分 $\int x\sqrt{3x-1} dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ.

$$3x-1=t \text{ とおくと, } x = \frac{t}{3} + \frac{1}{3}. \text{ したがって, } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3x-1} dx &= \int \frac{t+1}{3} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{45} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{45} (3x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

$$\sqrt{3x-1}=t \text{ とおくと, } x = \frac{t^2}{3} + \frac{1}{3}. \text{ したがって, } \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx &= \int \frac{t(t^2+1)}{3} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int (t^4 + t^2) dt = \frac{2}{45} t^5 + \frac{2}{27} t^3 + C \\ &= \frac{2}{45} (3x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

2 次の不定積分を求めよ.

a) $\int x(3x+2) dx$

b) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

a) $\int x(3x+2) dx = \int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + C$

b) $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. これより形式的に $dt = \frac{1}{x} dx$.

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \left(\frac{1}{x} dx\right) = \int \frac{1}{t} dt = \log t + C = \log(\log x) + C$$

c) $\int (x+1)e^x dx$

d) $\int \log(x+1) dx$

c) $u = x+1, v' = e^x$ とおいて, 部分積分 $\int uv' = uv - \int u'v$ を用いる. このとき $v = e^x$ だから

$$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

d) $u = \log(x+1), v' = 1$ とおいて, 部分積分を用いる. このとき $v = x$ となることに注意.

$$\begin{aligned} \int \log(x+1) dx &= x \log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx = x \log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= x \log(x+1) - (x - \log x) + C = (x+1) \log(x+1) - x + C \end{aligned}$$

3 $\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{17}$ の近似値を求めよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第何位まで一致するかを答えよ.

演習プリント 3 の 1 番の問題と同様に $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて, 高次微分による近似式で $n = 3, h = \frac{1}{16}$ とする. まず, 近似値は $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + R_3(h)$ より,

$$\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}} \approx 4 + \frac{4}{2} \frac{1}{16} - \frac{4}{8} \left(\frac{1}{16}\right)^2 = 4.123046875$$

近似の誤差は, $0 \leq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$ より,

$$0 \leq 4R_3\left(\frac{1}{16}\right) \leq 4 \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!} \left(\frac{1}{16}\right)^3 \approx 0.0000610352\dots$$

と評価できる. すなわち,

$$4.123046875 \leq \sqrt{17} \leq 4.123046875 + 0.0000610352\dots = 4.123107910\dots$$

となる. これより, $\sqrt{17}$ の小数点以下第 3 位までの値は 4.123 であることがわかる. (小数第 4 位は 0 または 1 であることもわかる.)

4 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ であるが, この式で x を $-x$ に置き換えて, $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ も成り立つ. したがって, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) = x + o(x^2)$. 一方, $e^x = x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ だから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2)}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x)}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x + \log(1-x)}$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ より

$$\begin{cases} \log(1+x) + \log(1-x) = -x^2 + o(x^3) \\ x + \log(1-x) = x + (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{cases}$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x + \log(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + o(x)}{-\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o(x)} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

5 つぎの2変数関数について、各変数に関する偏微分を計算せよ。

a) $f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + 3xy^3 - y^4 + 3$ b) $f(x, y) = (x + 2y^2 + 1)^3$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 8xy^2 + 3y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -8x^2y + 9xy^2 - 4y^3.$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x + 2y^2 + 1)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12y(x + 2y^2 + 1)^2.$

c) $f(x, y) = x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ d) $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}.$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$

6 次の関数の臨界点を求め、各臨界点において極大・極小を判定せよ。

a) $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + x^2y^2 - y^2$

まず、臨界点（偏微分がともに0になる点）を求めるために、連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y - 2y = 0$$

を解く。2番目の式から $y(x-1)(x+1) = 0$ が得られるので、 $y = 0, x = 1, x = -1$ をそれぞれ最初の式に代入し、 $(x, y) = (0, 0), (4, 0), (1, \pm 3\sqrt{2}/2), (-1, \pm\sqrt{30}/2)$ を得る。次に $D(x, y)$ を計算し、極大・極小の判定法を用いる。

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2 = (6x - 12 + 2y^2)(2x^2 - 2) - (4xy)^2 \\ = 4(3x^3 - 6x^2 - 3y^2x^2 - y^2 - 3x + 6)$$

- $D(0, 0) = 24 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 < 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極大。
- $D(4, 0) = 360 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4, 0) = 12 > 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(4, 0)$ で極小。
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので、 $(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）。
- $D(-1, \pm\sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので、 $(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）。

b) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$

まず、臨界点を求めると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \iff 1 - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2xy = 0 \\ \iff (x, y) = (1, 0) \quad \text{または} \quad (-1, 0)$$

$D(x, y)$ を計算し、極大・極小を判定すると以下ようになる。

- $D(1, 0) = \frac{1}{4} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -\frac{1}{2} < 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(1, 0)$ で極大。
- $D(-1, 0) = \frac{1}{4} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = \frac{1}{2} > 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極小。

c) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$

まず、臨界点を求めると、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1 + xy - y^2)e^{xy} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1 + x^2 - xy)e^{xy} = 0 \\ \iff 1 + xy - y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -1 + x^2 - xy = 0 \\ \iff (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{または} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2階微分を計算し、極大・極小を判定すると以下ようになる。

- $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）。
- $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{e} < 0$ なので $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）。