入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ 表面積が 24π である円柱のうち，体積が最大のものを見つけたい．

a) 円柱の底面の半径を r と高さを h としたとき，表面積 $S(r,h)$ を r と h で表わせ．

b) 表面積 $S(r,h)=24\pi$ という条件の下で 体積 $V(r,h)$ が最大となる r と h を Lagrange の乗数法で求めよ．

a) $S(r,h)=2\times(\text{底面積})+(\text{側面積})=2\pi r^2+2\pi rh.$

b) $L(r,h,\lambda)=V(r,h)-\lambda(S(r,h)-24\pi)$ とおく． $V(r,h)=\pi r^2 h$ であるから，

$$L(r,h,\lambda)=\pi r^2 h-\lambda(2\pi r^2+2\pi rh-24\pi)$$

偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r}=2\pi rh-\lambda(4\pi r+2\pi h)=0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial h}=\pi r^2-\lambda(2\pi r)=0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(2\pi r^2+2\pi rh-24\pi)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より　$2\pi rh=\lambda(4\pi r+2\pi h)$　$\cdots$ ①′
② より　$\pi r^2=\lambda(2\pi r)$　$\cdots$ ②′

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{2\pi rh}{\pi r^2}=\frac{\lambda(4\pi r+2\pi h)}{\lambda(2\pi r)} \Rightarrow \frac{2h}{r}=\frac{2r+h}{r} \Rightarrow h=2r$$

$h=2r$ を ③ に代入すると， $-(2\pi r^2+2\pi r(2h)-24\pi)=0$ より， $r^2=4$. ここで， $r>0$ だから， $r=2$ であり，このとき $h=2r=4$. $\therefore r=2, h=4.$

$\boxed{2}$ ある地域での土地の価格と建物の価格は，広さ 1 平方メートルにつき，それぞれ 8 万円， 20 万円である．市場調査により，顧客の満足度をは土地，建物の広さを x， y 平方メートルとするとき， $\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ に比例することがわかっている．いま， 3900 万円の予算をすべて使って家を建てたい顧客がいるとき，この顧客の満足度を最大にするには，土地と建物の広さをどれだけにすればよいか． Lagrange の乗数法を用いて求めよ．

$f(x,y)=\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ を $8x+20y \leqq 3900$ という条件の下で最大にしたい．予算を使い切ったときのほうが満足度が大きくなることは明らかなので， $8x+20y=3900$ という条件の下での最大値を求めればよい．そこで，

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\lambda(8x+20y-3900)$$

とおき，偏微分を計算して，それぞれを 0 とおく．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\lambda(8)=0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=y^{-\frac{1}{2}}-\lambda(20)=0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(8x+20y-3900)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より　$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=8\lambda$　$\cdots$ ①′
② より　$y^{-\frac{1}{2}}=20\lambda$　$\cdots$ ②′

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{8\lambda}{20\lambda} \Rightarrow \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{4}{5}\sqrt{x} \Rightarrow y=\frac{16}{25}x$$

これを ③ に代入して，

$$-\left(8x+20\times\frac{16}{25}x-3900\right)=0 \Rightarrow x=3900\times\frac{5}{104}=187.5$$

このとき， $y=3900\times\frac{5}{104}\times\frac{16}{25}=120.$ したがって，土地 $187.5\mathrm{m}^2$，建物 $120\mathrm{m}^2$ とすればよい．

【最適化復習問題】

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の臨界点をすべて求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ.

まず 2 階までの偏導関数を計算する.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,$$

臨界点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial 6}=3y^2-3=3(y-1)(y+1)=0 \end{cases}$$

を解くと，$(x,y)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ の 4 点が臨界点であることがわかる.

(a) $(x,y)=(1,1)$.

$$D(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2=36>0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=6>0$$

より，$(1,1)$ で極小.

(b) $(x,y)=(1,-1)$.

$$D(1,-1)=-36<0$$

より，$(1,-1)$ は鞍点.

(c) $(x,y)=(-1,1)$.

$$D(-1,1)=-36<0$$

より，$(-1,1)$ は鞍点.

(d) $(x,y)=(-1,-1)$.

$$D(1,1)=36>0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-6<0$$

より，$(-1,-1)$ で極大.

$\boxed{4}$ 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ の最大値・最小値を求めよ.

$L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3x-3y-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=3x^2-3-\lambda(2x)=0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=3y^2-3-\lambda(2y)=0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-1)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より　$3x^2-3=\lambda(2x)$　$\cdots$ ①$'$
② より　$3y^2-3=\lambda(2y)$　$\cdots$ ②$'$

$\dfrac{①'}{②'}$ より　$\dfrac{3x^2-3}{3y^2-3}=\dfrac{\lambda(2x)}{\lambda(2y)} \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{y^2-1}=\dfrac{x}{y} \Rightarrow y(x^2-1)=x(y^2-1) \Rightarrow (xy+1)(x-y)=0$

$xy=-1$ のとき，$y=-\dfrac{1}{x}$ を ③ に代入すると $x^2+\dfrac{1}{x^2}-1=0$ となる．この分母を払うと $x^4-x^2+1=0$ となるが，この方程式には実数解がない.
$x=y$ のとき，$y=x$ を ③ に代入すると $2x^2-1=0$ より，$x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

より，

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最大値 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で最小値 $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$