入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ
										氏 名

$\boxed{1}$ $\sqrt{27} = 5\sqrt{1+\frac{8}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{27}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

$f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の高次微分による近似式の $n = 3$，$h = \frac{8}{100}$ の場合を用いる．

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

より，

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4\times 2!}h^2 + R_3(h)$$

であり，また，$x \geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

すなわち，$f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $3/8$ をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが，0 以上であることはすぐにわかる．

したがって，近似値は

$$\sqrt{27} = 5\sqrt{1+\frac{8}{100}} \fallingdotseq 5 + \frac{5}{2}\frac{8}{100} - \frac{5}{8}\left(\frac{8}{100}\right)^2 = 5.1960$$

で，近似の誤差は，

$$0 \leqq 5\,R_3\left(\frac{8}{100}\right) \leqq 5\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{8}{100}\right)^3 \fallingdotseq 0.000160\dots$$

と評価できる．すなわち，

$$5.1960 \leqq \sqrt{27} \leqq 5.1960 + 0.000160 = 5.196160\dots$$

となる．これより，$\sqrt{27}$ の小数点以下第 3 位までの値は 5.196 であることがわかる．

$\boxed{2}$ $f(x) = e^x$，$h = 1$，$n = 6$ として e の近似値を求め，誤差の範囲を評価せよ．

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ なので，

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + R_6(h)$$

$h \geqq 0$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x$ は $0 \leqq x \leqq h$ では $x = 0$ のとき最小値 1，$x = h$ のとき最大値 e^h をとる．

$h = 1$ とすると，

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71666667\dots$$

であり，誤差は

$$\frac{1}{6!} = 0.00138889\cdots \leqq R_6(1) \leqq \frac{e}{6!} \leqq \frac{3}{6!} = 0.00416667\dots$$

と評価できる．これより，

$$2.71806\cdots \leqq e \leqq 2.72083\dots$$

したがって，e の近似値は小数第 1 位まで正しいことがわかる．第 3 位は 1 か 2 はこれでは判断できない．

$\boxed{3}$ a) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ とし， $f'(x), f''(x), f'''(x)$ を計算せよ．

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$

$f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$

b) α を正の実数とするとき， $\sqrt[3]{1+\alpha}$ の 2 次の近似式 $f(0) + f'(0)\alpha + \dfrac{f''(0)}{2!}\alpha^2$ を求めよ．またこのときの誤差の範囲を評価せよ．

$$f(\alpha) = f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2 = 1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 + R_3(\alpha)$$

とすると， $0 < x < \alpha$ のとき $0 \leqq (1+x)^{-\frac{8}{3}} \leqq 1$ だから，次の不等式（評価式）が成り立つ．

$$0 \leqq R_3(\alpha) \leqq \frac{f'''(0)}{3!}\alpha^3 = \frac{5}{81}\alpha^3.$$

c) $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示を用いて $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか．

$1 + \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{\alpha^2}{9}$ に $\alpha = \dfrac{1}{8}$ を代入して実際に計算すると

$$\sqrt[3]{9} \fallingdotseq 2\left(1 + \frac{1}{3\times 8} - \frac{1}{9\times 8^2}\right) = 2.07986111\ldots$$

このとき誤差は

$$2 \times R_3(\alpha) = 2 \times \frac{5}{81} \times \frac{1}{8^3} = 0.00024112\ldots$$

より小さいから，

$$2.07986 \leqq \sqrt[3]{9} \leqq 2.07986111\cdots + 0.00024112\cdots = 2.08010223\ldots$$

したがって， 2.07986 は $\sqrt[3]{2}$ と小数第 1 位の 0 まで一致しているはずである．（しかし，これだけでは $\sqrt[3]{9} = 2.07\ldots$ なのか $\sqrt[3]{9} = 2.08\ldots$ なのかは判定できない．）