入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ
										氏名

以下の問題は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について，$f_n(x) = x^n$ とおく．すなわち，$f_1(x) = x$，$f_2(x) = x^2$，$f_3(x) = x^3, \ldots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき，$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x) f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \bigl(f_1(x) f_k(x)\bigr)' =$$

［結論まできちんと述べよ．］

$\boxed{2}$ 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

b) a) の結果を利用して $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ．

$\boxed{3}$ 【$a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．

$\boxed{4}$ 【a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．［ヒント：$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

$\boxed{5}$ $x \neq 1$ で, n が自然数のとき, $1+x+x^2+\cdots+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つ. この両辺を x について微分することにより, $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ を求めよ.

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の導関数を求めよ.

a) $\left(\left(f(x)\right)^n\right)' =$

b) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' =$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$f'(x) =$

$\boxed{8}$ 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば, その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し, もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき，次の等式を証明せよ.

$$\left(f(x)g(x)\right)'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)