

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
						氏名	

• 合成関数の微分公式 (連鎖律)

2つの微分可能な関数  $y = f(u)$  と  $u = g(x)$  の合成関数  $y = f(g(x))$  の導関数を  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  の導関数で表したい。いま,

$x$  の増分  $\Delta x$  に対する  $u$  の増分を  $\Delta u$ ,

$u$  の増分  $\Delta u$  に対する  $y$  の増分を  $\Delta y$

とする。すなわち,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x),$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と定義する。ここで、求めたいのは  $x$  に対する  $y$  の増加率  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  の  $\Delta x \rightarrow 0$  としたときの極限である。  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  は、少々無理矢理に  $\Delta u$  を間に挟んで、

$$(*) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける。この両辺の  $\Delta x \rightarrow 0$  とした極限を考えると、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで  $u = g(x)$  が微分可能な関数であることから、 $\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\Delta u \rightarrow 0$  となるので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ。これより、合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

合成関数の微分公式を、' を用いた記法で表すことを考えよう。合成関数  $f(g(x))$  の導関数  $(f(g(x)))'$  は

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

で定義される。ここで、 $u = g(x)$  としたとき、 $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$  であったから、

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける。したがって、 $g(x + \Delta x)$ ,  $g(x)$  をそれぞれ、 $u + \Delta u$ ,  $u$  で置き換えて

$$f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と書くことができる。そして、(\*) と同様に  $\Delta u$  を間に挟むことにより

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

となる。この両辺において  $\Delta x \rightarrow 0$  とすると、 $\Delta u \rightarrow 0$  だから、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで、

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

だから、

$$(f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x)$$

$f'(u)$  を  $x$  で表すと  $f'(u) = f'(g(x))$  と書き直せるので、次の合成関数の微分公式が得られる。

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

• 逆関数の微分公式

関数  $f(x)$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  の微分公式を導きたい。関数  $f(x)$  の逆関数とは、 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$  をみたす関数  $g(x)$  に他ならない。そこで、 $f(g(x)) = x$  の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると、

$$\text{左辺} = f'(g(x))g'(x), \quad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから、

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

これを  $g'(x)$  について解くと、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$g(x)$  を  $f^{-1}(x)$ ,  $g'(x)$  を  $(f^{-1}(x))'$  と書き直すことにより、逆関数の導関数の公式が得られる。

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1  $\left(f(g(h(x)))\right)'$  を求めよ.

$g(h(x)) = G(x)$  とおくと,

$$\begin{aligned}\left(f(g(h(x)))\right)' &= \left(f(G(x))\right)' = f'(G(x))G'(x) \\ &= f'(g(h(x)))(g(h(x)))' \\ &= f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\end{aligned}$$

2  $(g(x)^2)'$  を求めよ.

$f(x) = x^2$  とおくと,  $f'(x) = 2x$  だから,  $(g(x)^2)' = f'(g(x))g'(x) = 2g'(x)g(x)$ .

3  $f(x) = x^2$  としたとき,  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  である. 逆関数の微分公式を用いて  $(\sqrt{x})'$  を求めよ.

$$f'(x) = 2x \text{ だから, } (\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4 前問と同様にして  $(\sqrt[3]{x})'$  を求めよ.

$f(x) = x^3$  とおくと,  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $f'(x) = 3x^2$  だから,

$$(\sqrt[3]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3f^{-1}(x)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5 次の関数を変数  $x$  で微分せよ.

a)  $f(x) = (1 - 2x^2)^3$

$$f'(x) = -12x(1 - 2x^2)^2$$

b)  $f(x) = \frac{1}{(4x + 3)^2}$

$$f'(x) = \frac{-8}{(4x + 3)^3}$$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^4}$$

d)  $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

e)  $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

f)  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

g)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}}$$

h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$