

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

定義域: (根号内) ≥ 0 より, $-2 \leq x \leq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x(\sqrt{4-x^2})' = \sqrt{4-x^2} + x \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	...	$-\sqrt{2}$...	$\sqrt{2}$...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値, 最小値を求めよ.

最大値: 2 ($x = \sqrt{2}$)

最小値: -2 ($x = -\sqrt{2}$)

2) 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき, その表面積 S を最小にしたい.

a) 底面の半径を r , 高さ h とするとき, S と V をそれぞれ r と h で表せ.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h$$

b) S を V と r で表せ.

$$V = \pi r^2 h \text{ より, } h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

これを S の式に代入し,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

c) S を r の関数とみて, $\frac{dS}{dr}$ を計算し, S の増減表を書け.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr} \left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

r は正の範囲を動くので, 増減表は右の通り.

r	0	...	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$...
$\frac{dS}{dr}$	×	-	0	+
S	×	↘	最小	↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ. また, そのときの h の値も求めよ.

増減表より, S は $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ のとき最小になる.

$$\text{このとき, } h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi} \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} (= 2r).$$

(答) 半径 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 高さ $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ のとき.

3] $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

真数条件より, $x > 0$.

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き, 増減を調べよ.

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e.$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$	\times	+	0	-
$f(x)$	\times	\nearrow	極大	\searrow

c) b) の結果を用い, $\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$ を示せ.

$e = 2.718\dots < \pi = 3.14159\dots$ だから, 上の増減表より $f(e) > f(\pi)$.

これより直ちに, $\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$ が導かれる.

d) c) の結果を用い, π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ. [ヒント: $\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ.]

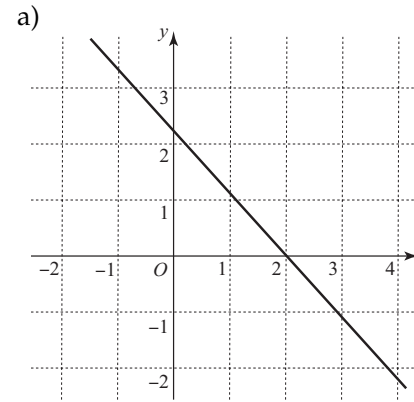
$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e} \text{ の両辺に } e\pi (> 0) \text{ をかけて, } e \log \pi < \pi \log e.$$

さらに, 対数の性質を用いて $\log \pi^e < \log e^\pi$.

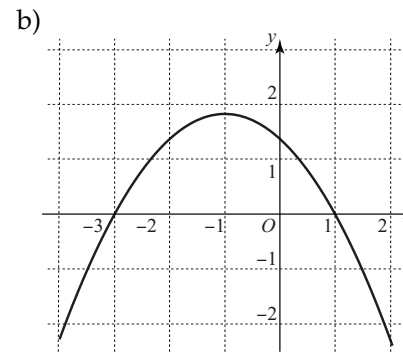
ここで, 対数の底 e は 1 より大きいから, $\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$ が成り立つ.

したがって, $\pi^e < e^\pi$.

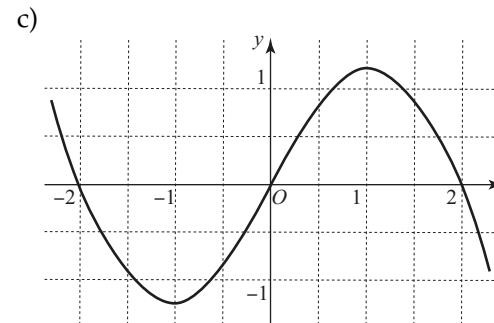
4] 次の各々のグラフは導関数 $y = f'(x)$ のグラフの概形を示したものである. これをもとに, $f'(x)$ と $f''(x)$ の値の正負を読み取り, 関数 $f(x)$ の増減表を書いて, $y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ, 極大・極小となる点, 変曲点をもとめよ. (凹凸は曲がった矢印 \nearrow \curvearrowright \searrow \curvearrowleft で表すこと.)



x	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-
$f(x)$	\curvearrowright	極大	\curvearrowleft



x	...	-3	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	\curvearrowleft	極小	\curvearrowright	変曲点	\curvearrowright	極大	\curvearrowleft



x	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	\curvearrowright	極大	\curvearrowleft	変曲点	\curvearrowleft	極小	\curvearrowright	変曲点	\curvearrowright	極大	\curvearrowleft