入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases} cx(1-x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x<0,\ x>1 \end{cases}$ で定義する．

a) $f(x)$ が確率密度になるように c の値を定めよ．

$f(x)$ が確率密度になるためには $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ とならなければならない．そこで，左辺を計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx = c\int_0^1 (x-x^2)\,dx = c\Big[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{c}{6}$$

となる．したがって $c=6$ でなければならない．

b) $f(x)$ を確率密度とする確率変数 X について平均 $\mu = E(X)$ と分散 $\sigma^2 = V(X)$ を求めよ．

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 6\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)\,dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx - \frac{1}{4}$$

$$= 6\Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$\boxed{2}$ 【正規分布】あるシーズンのプロ野球の 1 試合にかかる時間は，平均 3 時間 18 分，標準偏差 24.0 分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた．この結果をもとにして，試合が 2 時間 30 分以内で終わる確率をもとめよ．

１試合にかかる時間を X とおくと，この調査結果は X が正規分布 $N(198, 24.0^2)$ に従っていることを意味する．ここで，時間の単位は分である．求める確率は $P(X \leqq 150)$ である．今， $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-198}{24.0}$ とおくと， $Z \sim N(0,1)$ となり，

$$P(X \leqq 150) = P\left(Z \leqq \frac{150-198}{24.0}\right) = P(Z \leqq -2.00)$$

が成り立つ．この確率を標準正規分布表から求めと次のようになる．

$$P(Z \leqq -2.00) = P(Z \geqq 2.00) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228\ (= 約\ 2.3\%)$$

$\boxed{3}$ 【推定】某メーカーのあるデジタルカメラを購入しようと思い，インターネットでいろいろな店の値段 X を調べてみたところ 25 店舗での平均は 3.5 万円であった． X の母標準偏差の値が 0.2 万円であるとわかっているとき，平均価格を信頼度 95%で推定せよ．

標本平均 $\overline{X}$ は母平均価格を μ，母標準偏差を σ とするとき，正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので， $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は $N(0,1)$ に従う．このとき， $P(|Z|<k) < 0.95$ となるような k を正規分布表よりもとめると $k = 1.96$ となる．そこで， $|Z| < 1.96$ という条件を μ について解くと，

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る．これに $\overline{X} = 3.5, \sigma = 0.2, n = 25$ をあてはめると，

$$3.5 - 1.96\frac{0.2}{5} < \mu < 3.5 + 1.96\frac{0.2}{5} \quad より \quad 3.4216 < \mu < 3.5784$$

$\boxed{4}$ 【推定】昨年の紅白歌合戦の視聴率を調査するために無作為に 400 人を選び，アンケートをとったところ 160 人が紅白歌合戦を見たと答えた．このとき，紅白歌合戦の視聴率を信頼度 95%で推定せよ．

考え方は前問と同様．視聴率を p とすると，標準偏差 σ は $\sqrt{p(1-p)}$ となる（二項分布の $n=1$ の場合）．
「標本視聴率」は $\overline{p} = \frac{160}{400} = 0.40$ である．このとき， σ は $\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})} = \sqrt{0.4\times 0.6}$ で代用し，

$$0.4 - 1.96\frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} < p < 0.4 + 1.96\frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} \quad より \quad 0.352 < p < 0.448$$

$\boxed{5}$ 【仮説検定】あるシーズンのプロ野球の 1 試合にかかる時間は，平均 3 時間 18 分，標準偏差 24.0 分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた．これでは試合時間が長すぎるという批判を受けて，プロ野球機構は試合時間短縮のためのある方策をとった．すると，シーズン最初の一ヶ月間に行なわれた 36 試合の平均時間は 3 時間 10 分となった．このとき，機構のとった方策の効果が本当にあったと言えるか，有意水準 5%で検定せよ．

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 198$，対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 198$ として，片側検定を行う．
そこで， $\mu = 198$ と仮定し， 36 試合の標本平均 $\overline{X}$ に対し， $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-198}{4.0}$ とおく．このとき，$Z \sim N(0,1)$ となるが，標準正規分布表を用いると， $Z < -1.645$ となる確率が 5% 未満であることがわかる．いま， $\overline{X} = 190$ とすると $Z = -2.0 < -1.645$ となるので，このような確率は 5%未満であり，「滅多に起きない」と考えられ，帰無仮説 H_0 は棄却される．これより，対立仮説 H_1 が採択され，「方策の効果があり，平均試合時間は短縮した」と結論づけられる．

$\boxed{6}$ 【仮説検定】全国の大学生の体格指数 BMI （Body Mass Index = （体重 kg）/（身長 m）^{2}）の平均は 22.0 で標準偏差は 2.0 であることがわかっているとする．ある学生グループ 49 人に対して健康診断を行い BMI を調べたところ平均は 20.7 であった．この学生のグループは全国の学生と比較して痩せているといえるか．有意水準 5%で検定せよ．

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 22.0$，対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 22.0$ として，片側検定を行う．
前問と同様にして， $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-22.0}{\frac{2.0}{7}}$ とおき， $\overline{X} = 20.7$ のときの Z の値を計算すると $Z = -4.55 < -1.65$ となる．したがって H_0 は棄却され，このグループの学生は全国平均と比べて痩せているといえる．

$\boxed{7}$ 【仮説検定】昨年末の紅白歌合戦第 2 部の視聴率は全国平均 40%であったという調査がある， C 大学の学生 600 人にアンケートをとったところ 216 人が紅白歌合戦第 2 部を見たと答えた．この結果から，C 大生の間の紅白視聴率は全国平均より低かったといえるか．有意水準 5%で検定せよ．

検定の枠組みは前 2 問と同様であるが，問題 4 のように σ として $\sqrt{p(1-p)}$ を用いることだけが異なる．
$Z = \frac{\overline{p}-0.4}{\frac{\sqrt{0.4(1-0.4)}}{\sqrt{600}}}$ に対し， $\overline{p} = \frac{216}{600}$ とおいて計算すると， $Z = -2.0$ となるので，この問題でも H_0 は棄却され， C 大生の視聴率は全国平均と比べて低かったといえる．