入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ
										氏 名

1 1 枚の硬貨を続けて 5 回投げるとき，表の出る回数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を定義にしたがって求めよ．

$$E(X) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 2\times\frac{10}{32} + 3\times\frac{10}{32} + 4\times\frac{5}{32} + 5\times\frac{1}{32}$$
$$= \frac{1}{32}(5+20+30+20+5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}\ (=2.5)$$

c) 分散 $V(X)$ は $E(X)=\mu$ とおいて $V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2 p_k$ と定義されるのであった．この定義を直接用いて $V(X)$ を計算せよ．

$$V(X) = \left(0-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{32} + \left(1-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{32} + \left(2-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32}$$
$$+\left(3-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32} + \left(4-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{32} + \left(5-\tfrac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{32}$$
$$= \frac{25}{4}\times\frac{1}{32} + \frac{9}{4}\times\frac{5}{32} + \frac{1}{4}\times\frac{10}{32} + \frac{1}{4}\times\frac{10}{32} + \frac{9}{4}\times\frac{5}{32} + \frac{25}{4}\times\frac{1}{32}$$
$$= \frac{25+45+10+10+45+25}{4\times 32} = \frac{5}{4}\ (=1.25)$$

d) 確率変数 X^2 の確率分布を求めよ．

X	0	1	4	9	16	25	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

e) 確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2)-E(X)^2$ を計算し， $E(X^2)-E(X)^2=V(X)$ であることを確かめよ．

$$E(X^2) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 4\times\frac{10}{32} + 9\times\frac{10}{32} + 16\times\frac{5}{32} + 25\times\frac{1}{32}$$
$$= \frac{1}{32}(5+40+90+80+25) = \frac{240}{32} = \frac{15}{2}\ (=7.5)$$

$$E(X^2)-E(X)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{30-25}{4} = \frac{5}{4}$$

これは d) で求めた $V(X)$ と一致する．

2 X は， $x_1, x_2, \dots, x_n$ という値をとる確率が，それぞれ $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるような確率変数であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．いま， a, b を定数とするとき，確率変数 Y を $Y=(aX+b)^2$ と定義する． Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$(ax_1+b)^2$	$(ax_2+b)^2$	$\cdots$	$(ax_k+b)^2$	$\cdots$	$(ax_n+b)^2$	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), E(X^2), a, b$ を用いて表せ．

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n}(a^2x_k^2 + 2abx_k + b^2)p_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a^2x_k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} 2abx_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b^2 p_k$$
$$= a^2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k + 2ab\sum_{k=1}^{n} x_k p_k + b^2\sum_{k=1}^{n} p_k$$
$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2$$

b) X の分散の定義は $\mu=E(X)$ として， $V(X)=E\big((X-\mu)^2\big)$ と表すことができる． a) の結果を用いて $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ が成り立つことを証明せよ．

a) において $a=1, b=-\mu$ とおくと，

$$V(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = 1^2E(X^2) + 2\cdot 1\cdot(-\mu)\cdot E(X) + (-\mu)^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) - \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$\boxed{3}$ 2 個のサイコロを投げるとき，出た目の数のうち大きくない方を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{36}\left(1 \times 11 + 2 \times 9 + 3 \times 7 + 4 \times 5 + 5 \times 3 + 6 \times 1\right) = \frac{91}{36}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{36}\left(1 \times 11 + 4 \times 9 + 9 \times 7 + 16 \times 5 + 25 \times 3 + 36 \times 1\right) = \frac{301}{36}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2555}}{36}$$

$\boxed{4}$ 1 から 6 までの番号をつけた 6 枚のカードがある．この中から同時に 2 枚のカードを引くとき，引いたカードの番号の大きい方を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{15}\left(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5\right) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{15}\left(4 \times 1 + 9 \times 2 + 16 \times 3 + 25 \times 4 + 36 \times 5\right) = \frac{350}{15} = \frac{70}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{70}{15} - \left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$