入学年度	学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ
										氏 名

1 次の二項分布の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

a) $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$　　b) $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$　　c) $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

a)
平均：$\mu = 12 \times \frac{1}{4} = 3$
分散：$\sigma^2 = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$
標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

b)
平均：$\mu = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
分散：$\sigma^2 = 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$
標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

c)
平均：$\mu = 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$
分散：$\sigma^2 = 8 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$
標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

2 次の確率変数 X は二項分布に従う． X を $B(n, p)$ の形に表し， X の期待値，標準偏差を求めよ．

a) 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表が出る回数 X．

$p = \frac{1}{2}$， $n = 10$ なので， $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$
平均：$\mu = 10 \times \frac{1}{2} = 5$
分散：$\sigma^2 = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
標準偏差：$\sigma = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

b) 不良率 3%の製品の山から 50 個取り出したときの不良品の個数 X．

$p = 0.03$， $n = 50$ なので， $X \sim B(50, 0.03)$
平均：$\mu = 50 \times 0.03 = 1.5$
分散：$\sigma^2 = 50 \times 0.03 \times 0.97 = 1.455$
標準偏差：$\sigma = \sqrt{1.455} \fallingdotseq 1.21$

3 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき，次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ．

a) $Y = 3X - 2$

$$\begin{cases} E(X) = 100 \times 0.2 = 20 \\ V(X) = 100 \times 0.2 \times 0.98 = 16 \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 20 - 2 = 58 \\ V(X) = V(3X - 2) = 3^2 = 9 \times 16 = 144 \end{cases}$$

b) $Y = -X$

$$\begin{cases} E(Y) = E(-X) = -E(X) = -20 \\ V(X) = V(-X) = (-1)^2 = 16 \end{cases}$$

c) $Y = \dfrac{X - 20}{4}$ $Y = 3X - 2$

$$\begin{cases} E(Y) = E\left(\dfrac{X - 20}{4}\right) = \dfrac{E(X) - 20}{4} = 0 \\ V(X) = V\left(\dfrac{X - 20}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 V(X) = 1 \end{cases}$$

4 a， b は定数で， $a > 0$ とする．確率変数 X の期待値が 5，分散が 100 であるとき， 1 次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が 0，分散が 1 となるように， a， b の値を定めよ．

$E(X) = 5$， $V(X) = 100$ より，

$$\begin{cases} E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 5a + b = 0 \\ V(X) = V(aX + b) = a^2 V(X) = 100a^2 = 1 \end{cases}$$

が成り立てばよいから， $\begin{cases} 5a + b = 0 \\ 100a^2 = 1 \end{cases}$ を解いて， $a = \frac{1}{10}$， $b = -\frac{1}{2}$．

$\boxed{5}$ 数直線上に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に 1 だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に 1 だけ動かす．最初に針を原点に立てておき，硬貨を 6 回投げた後の針の座標を X とする．また，第 k 回目に表が出ると 1，裏が出ると -1 となる確率変数を X_k とすると， $X_1, \ldots, X_6$ は互いに独立であって， $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_6$ と表せる．次の問に答えよ．

a) 第 k 回目に表が出ると 1，裏が出ると 0 となる確率変数を Y_k とする． X_k を Y_k で表せ．

$y = 1$ のときに $x = 1$， $y = 0$ のときに $x = -1$ となる 1 次関数 $x = my + b$ を求める．

そのために， $\begin{cases} 1 \cdot m + b = 1 \\ 0 \cdot m + b = -1 \end{cases}$ を解くと， $m = 2$， $b = -1$ を得る．

したがって， $X_k = 2Y_k - 1$ が成り立つ．

b) $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_6$ は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表せ．

$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$

c) X を Y を用いて表せ．

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \cdots + X_6 = (2Y_1 - 1) + (2Y_2 - 1) + \cdots + (2Y_6 - 1) \\ &= 2(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_6) - 6 \\ &= 2Y - 6 \end{aligned}$$

d) X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ より， $E(Y) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$， $V(Y) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$．

したがって，

$E(X) = E(2Y - 6) = 2E(Y) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$

$V(X) = E(2Y - 6) = 2^2 V(Y) = 6$

$\sigma(X) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{6}$

$\boxed{6}$ 2 個のサイコロを同時に投げるとき，同じ目が出るならば 20 点を得，異なる目が出るならば 2 点を失うという．これを 15 回繰り返したとき，得点の合計の期待値と標準偏差を求めよ．

2 個のサイコロを同時に投げる思考を 15 回繰り返したときに同じ目が出る回数を X とする．

このとき， X は二項分布 $B\left(15, \frac{1}{2}\right)$ にしたがう．

得点を Y とすると， X と Y の間には

$Y = 20 \times \underbrace{X}_{\text{同じ目}} + (-2) \times \underbrace{(15 - X)}_{\text{違う目}} = 22X - 30.$

$E(X) = 15 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$， $V(V) = 15 \times \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{12}$.

したがって，

$E(Y) = E(22X - 30) = 22E(X) - 30 = 22\frac{5}{2} - 30 = 25$

$V(Y) = V(22X - 30) = 22^2 V(Y) = 22^2 \times \frac{25}{12} = \frac{3025}{3}$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{55\sqrt{3}}{3}$