入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

1　さいころを 2 回続けて投げるとき，最初に出た目の数を X_1，２回目に出た目の数を X_2 する.

a)　確率変数 X_1 の期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ を求めよ.

$$E(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V(X_1) = E(X_1)^2 - E(X_1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

b)　確率変数 Y を X_1 と X_2 の和とする．すなわち， $Y = X_1 + X_2$ とする． Y の確率分布を求めよ.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c)　確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求め， $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ であることを確かめよ

$$E(Y) = \frac{1}{36}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4$$
$$+10\times3+11\times2+12\times1)$$
$$= \frac{252}{36} = 7$$

一方， $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから， $E(X_1) + E(X_2) = 7$.

よって， $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ は確かに成り立つ.

d)　確率変数 Y の分散 $V(Y)$ を定義にしたがって求め， $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ であることを確かめよ.

$$V(Y) = \frac{1}{36}((2-7)^2\times1+(3-7)^2\times2+(4-7)^2\times3+(5-7)^2\times4+(6-7)^2\times5+(7-7)^2\times6$$
$$+(8-7)^2\times5+(9-7)^2\times4+(20-7)^2\times3+(11-7)^2\times2+(12-7)^2\times1)$$
$$= \frac{1}{36}(25+32+27+16+5+16+27+32+25) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

一方， $V(X_1) = V(X_2) = \frac{35}{12}$ だから， $V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{6}$.

よって， $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ は確かに成り立つ.

e)　次に，確率変数 Z を X_1 と X_2 の積とする．すなわち， $Z = X_1X_2$ とする． Z の確率分布を求めよ.

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

f)　確率変数 Z の期待値 $E(Z)$ を求め， $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ.

$$E(Z) = \frac{1}{36}(1\times1+2\times2+3\times2+4\times3+5\times2+6\times4+8\times2+9\times1+10\times2+12\times4$$
$$+15\times2+16\times1+18\times2+20\times2+24\times2+25\times1+30\times2+36\times1)$$
$$= \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

一方， $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから， $E(X_1)E(X_2) = \frac{49}{4}$.

よって， $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ は確かに成り立つ.

$\boxed{2}$ 独立な確率変数 X と Y について， $E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ．この性質を既知として，独立な確率変数 X と Y について， $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ． ［分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いるとよい．］

$$
\begin{aligned}
V(X+Y) &= E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \big(E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\big) \\
&= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{=V(X)} + 2\big(\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{=0\ (X,Y\ \text{独立より})}\big) + \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{=V(Y)} \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5，確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり， X と Y が互いに独立であるとする．このとき，確率変数 $Z = X + Y$ の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(X) = -3,\ V(X) = 5,$
$E(Y) = 2,\quad V(Y) = 4.$

X と Y は独立だから，

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -3 + 2 = -1$

$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 5 + 4 = 9$

$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{9} = 3$

$\boxed{4}$ a) さいころを 1 回投げるとき， 1 の目が出ると $X = 1$，それ以外の目が出ると $X = 0$ とする．確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times 0 = \frac{1}{6} \\
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{5}{6} \times 0^2\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}
\end{aligned}
$$

X	1	0	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき， 1 の目の出る回数を Y とする．このとき，第 k 回目に 1 の目が出ると 1，それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると，各 X_k は a) と同じ分布にしたがい， $X_1, \ldots, X_5$ は互いに独立であって， $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる．これを用いて，確率変数 Y の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_5) = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_5) = \frac{5}{36} \times 5 = \frac{25}{36}$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{5}{6}$