

| | | | | | | |
|------|----|----|---|----|---|------|
| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ |
| | | | | | | 氏名 |

以下の問題は、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

① 【 a が自然数の場合】 任意の自然数 n について、 $f_n(x) = x^n$ とおく。すなわち、 $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = x^2$ 、 $f_3(x) = x^3$ 、... となる関数の列 $f_n(x)$ を考える。このとき、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと、すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい。

(I) $n = 1$ のとき、 $f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると、 $f_k'(x) = kx^{k-1}$ 。いま、 $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから、積の微分公式を用いて、

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

[結論まできちんと述べよ。]

② 【 a が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$ を証明せよ。

b) a) の結果を用いて $(x^{-n})'$ を $\square x^{\square}$ の形に表せ。

③ 【 $a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると、関数 $\sqrt[n]{x}$ は、関数 $f(x)$ の逆関数である。すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である。

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ。

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ を $\square x^{\square}$ の形に表せ。

④ 【 a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い、合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を $\square x^{\square}$ の形に表せ。[ヒント: $f(x) = x^m$, $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい。]

5] $x \neq 1$ で, n が自然数のとき, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ. この両辺を x について微分することにより, $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ.

6] 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき, 次の導関数を求めよ.

a) $((f(x))^n)' =$

b) $(\sqrt{f(x)})' =$

7] 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$f'(x) =$

8] 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば, その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し, もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき, 次の等式を証明せよ.

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$