入学年度	学部	学科		組		番号		検	フリガナ
									氏名

● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2つの微分可能な関数 $y=f(u)$ と $u=g(x)$ の合成関数 $y=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y=f(u)$, $u=g(x)$ の導関数で表したい．いま， x を $x+\Delta x$ に変化させたとき，

$$u\longrightarrow u+\Delta u,\qquad y\longrightarrow y+\Delta y$$

と変化するとすると，求めたいのは Δx に対する Δy の増加率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x\to 0$ としたときの極限である．ここで， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ に，少々強引に Δu を間に挟んで，

(1)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書く．この両辺の $\Delta x\to 0$ とした極限を考えると，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで $u=g(x)$ が微分可能な関数であることから， $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ とならなければならない．なぜなら， $\Delta u\to 0$ でなければ $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ が有限の値に収束せず，発散してしまうからである．したがって， $\Delta x\to 0$ を $\Delta u\to 0$ に書き換えることができて，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\boxed{\quad}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}$$

この合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで， $u=g(x)$ としたとき， $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であったから，

$$g(x+\Delta x)=u+\Delta u$$

と書ける．したがって， $g(x+\Delta x)$， $g(x)$ をそれぞれ， $u+\Delta u$， u で置き換えて

$$f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)=\boxed{\qquad\qquad}$$

と書くことができる．そして， (1) と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\begin{aligned}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}&=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}\\&=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\Delta x}\end{aligned}$$

となる．この両辺において $\Delta x\to 0$ とすると， $\Delta u\to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\boxed{\quad},\qquad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\boxed{\quad}$$

だから，

$$\big(f(g(x))\big)'=\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u)=f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=\boxed{\qquad\qquad}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは， $g\big(f(x)\big)=f\big(g(x)\big)=x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで， $f(g(x))=x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺}=\boxed{\qquad\qquad},\qquad\text{右辺}=(x)'=1$$

となるから，

$$\boxed{\qquad\qquad}=1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x)=\frac{1}{\boxed{\quad}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$， $g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)'=\frac{1}{\boxed{\quad}}$$

$\boxed{1}$ $\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)'$ を求めよ.

$\boxed{2}$ $\big(g(x)^2\big)'$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ としたとき， $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である．逆関数の微分公式を用いて $\big(\sqrt{x}\big)'$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 前問と同様にして $\big(\sqrt[3]{x}\big)'$ を求めよ.

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) =$