入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい．いま， x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，

$$u \longrightarrow u + \Delta u, \qquad y \longrightarrow y + \Delta y$$

と変化するとすると，求めたいのは Δx に対する Δy の増加率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ としたときの極限である．ここで， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ に，少々強引に Δu を間に挟んで，

(1) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書く．この両辺の $\Delta x \to 0$ とした極限を考えると，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから， $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ とならなければならない．なぜなら， $\Delta u \to 0$ でなければ $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ が有限の値に収束せず，発散してしまうからである．したがって， $\Delta x \to 0$ を $\Delta u \to 0$ に書き換えることができて，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\boxed{\Delta u \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dy}{du}} \cdot \boxed{\frac{du}{dx}}$$

合成関数の微分公式を， $'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで， $u = g(x)$ としたとき， $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ であったから，

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける．したがって， $g(x + \Delta x)$， $g(x)$ をそれぞれ， $u + \Delta u$， u で置き換えて

$$f\big(g(x + \Delta x)\big) - f\big(g(x)\big) = \boxed{f(u + \Delta u) - f(u)}$$

と書くことができる．そして，(1) と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\begin{aligned}
\frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\boxed{g(x + \Delta x) - g(x)}}{\Delta x}
\end{aligned}$$

となる．この両辺において $\Delta x \to 0$ とすると， $\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(g(x + \Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \boxed{f'(u)}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{g'(x)}$$

だから，

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{f'(u)} \cdot \boxed{g'(x)}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは， $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで， $f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺} = \boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)}, \qquad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから，

$$\boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)} = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x) = \frac{1}{\boxed{f'\big(g(x)\big)}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$， $g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\boxed{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

$\boxed{1}$ $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ．

$g\left(h(x)\right) = G(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)' &= \left(f(G(x))\right)' = f'(G(x))G'(x)\\ &= f'\left(g\left(h(x)\right)\right)\left(g\left(h(x)\right)\right)'\\ &= f'\left(g\left(h(x)\right)\right)g'(h(x))h'(x)\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $(g(x)^2)'$ を求めよ．

$f(x) = x^2$ とおくと， $f'(x) = 2x$ だから， $(g(x)^2)' = f'(g(x))g'(x) = 2g'(x)g(x)$.

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ としたとき， $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である．逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt{x}\right)'$ を求めよ．

$f'(x) = 2x$ だから， $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{2f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{4}$ 前問と同様にして $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$ を求めよ．

$f(x) = x^3$ とおくと， $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$， $f'(x) = 3x^2$ だから，

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{3f^{-1}(x)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$f'(x) = -12x(1-2x^2)^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-8}{(4x+3)^3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^2\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)