2023 年 1 月 6 日

基礎数学 A2	入学年度		学部	学 科		組		番 号		検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人												

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-1}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

分母 $\neq 0$ より，$x \neq \dfrac{1}{2}$ （正確には $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$）

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x-1}$ の形に表せ．

$4x-1$ を $2x-1$ で割り算すると，商は 2，余りは 1 なので，

$\dfrac{4x-1}{2x-1} = 2 + \dfrac{1}{2x-1}$

c) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．［ヒント：前問の形に直してから計算するとよい．］

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\left(2+\dfrac{1}{2(1+h)-1}\right) - \left(2+\dfrac{1}{2\times 1-1}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+2h}-1}{h} = \frac{1-(1+2h)}{h(1+2h)} = \frac{-2h}{h(1+2h)} = \frac{-2}{1+2h}$$

d) $f(x)$ の $x=1$ における微分係数を極限による定義を用いて計算せよ．

c) の結果を用いて，

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+2h} = -2$$

e) $y = f(x)$ のグラフの $(1, f(1))$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式は $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ で与えられる．

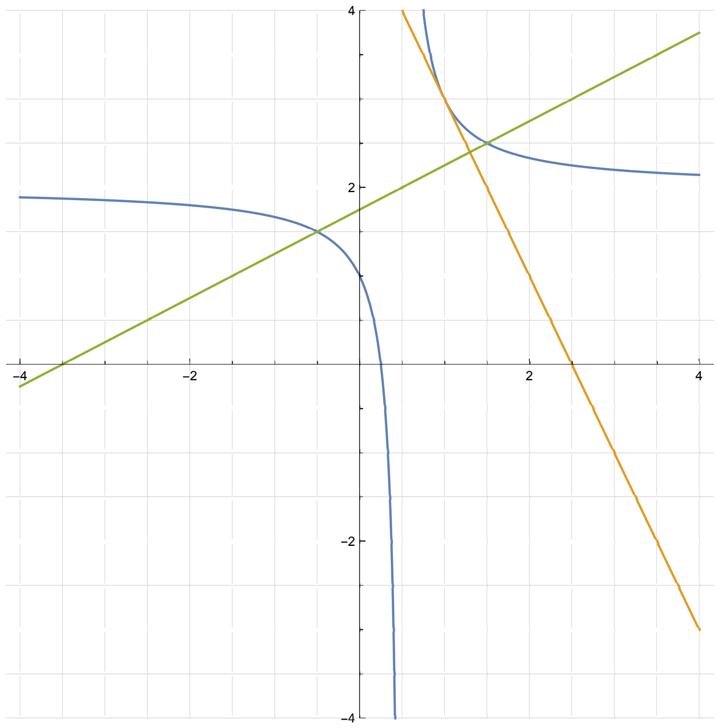
$f(1) = 3,\ f'(1) = -2$ より，$y - 3 = -2(x-1)$

$\therefore\ y = -2x + 5$

f) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ の交点を求めよ．

$\dfrac{4x-1}{2x-1} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ を解く．$4x-1 = (2x-1)(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4})$ より，$4x^2-4x-3 = (2x-3)(2x+1)$．したがって，$x = -\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{3}{2}$．それぞれについて y 座標を求めると，交点は $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ と $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ の 2 つであることがわかる．

g) $y = f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ を下の座標平面内に描け．



h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{4x-1}{2x-1} \leqq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ を解け．

$y = \dfrac{4x-1}{2x-1}$ のグラフが直線より下にある x の範囲を求めればよい．

グラフを参照して，$-\dfrac{1}{2} \leqq x < \dfrac{1}{2}$ または $x \geqq \dfrac{3}{2}$．

i) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を示せ．

$y = \dfrac{4x-1}{2x-1}$ を x について解けばよい．まず分母を払って，$(2x-1)y = 4x-1$．これを x について整理すると，$(2y-4)x = y-1$．この x についての方程式は $y \neq 2$ のとき解を持ち，$x = \dfrac{y-1}{2(y-2)}$．ここで，y と x を入れ替えて $y = \dfrac{x-1}{2(x-2)}$．$\therefore\ f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2(x-2)}$． 定義域は $x \neq 2$．

j) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の値域を示せ．

$y = f(x)$ の値域：$y \neq 2$

$y = f^{-1}(x)$ の値域：$y \neq \dfrac{1}{2}$

k) $(f^{-1}\circ f)(x) = x$ が成り立つことを確かめよ．

$$(f^{-1}\circ f)(x) = \frac{\dfrac{4x-1}{2x-1}-1}{2\left(\dfrac{4x-1}{2x-1}-2\right)} = \frac{(4x-1)-(2x-1)}{2\big((4x-1)-2(2x-1)\big)} = \frac{2x}{2\times 1} = x$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{3-x}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$x \leqq 3$（分母 $\neq 0$ より）

値域：$y \geqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = \sqrt{3-x}$ の両辺を 2 乗して，$y^2 = 3 - x$．これを x について解くと，$x = -y^2 + 3$．ここで，x と y を入れ替えて，$y = -x^2 + 3$．すなわち，$f^{-1}(x) = -x^2 + 3$ で，その定義域は元の関数の値域に一致するから，$x \geqq 0$．また，その値域は元の関数の定義域に一致するので，$y \leqq 3$.

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left(\sqrt{3-x}\right)' = \left((3-x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}}(3-x)'$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

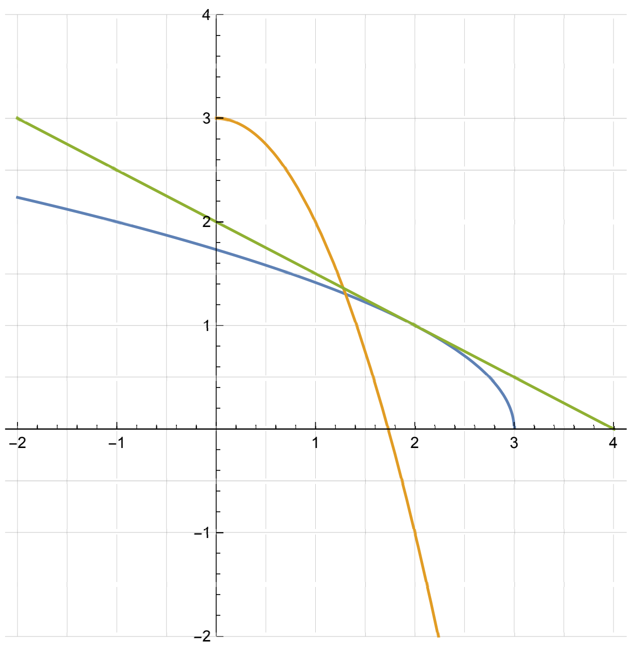
d) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式は $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ で与えられる．

$f(2) = 1,\ f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ より，$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(2, f(2))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{6x}{1+2x^2}$ とする．

a) $f(1), f(2), f(3), f(4)$ をそれぞれ求めよ．

$f(1) = 2 \qquad f(2) = \dfrac{4}{3} \qquad f(3) = \dfrac{18}{19} \qquad f(4) = \dfrac{8}{11}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \frac{(6x)'(1+2x^2) - (6x)(1+2x^2)'}{(1+2x^2)^2} = \frac{6(1+2x^2-4x^2)}{(1+2x^2)^2}$$
$$= \frac{6(1-2x^2)}{(1+2x^2)^2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6(1-2x^2)}{(1+2x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) $f''(x) = \dfrac{24x(2x^2-3)}{(1+2x^2)^3}$ である．これより，$f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24x(2x^2-3)}{(1+2x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x(2x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(2x^2-3) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2} < x < 0 \text{ または } x > \frac{\sqrt{6}}{2}$$

e) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフ $y = f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ⤷ ⤵ で表すこと．)

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	変曲点	⤷	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵	変曲点	⤷

f) $f(x)$ の極大値・極小値と，それをとるときの x の値を求めよ．

極大値：$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

極小値：$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

g) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

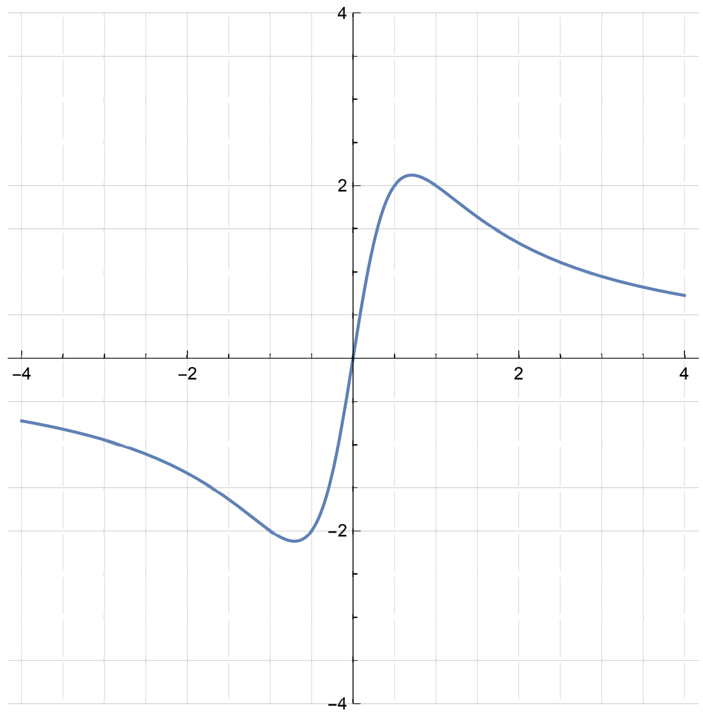
変曲点の x 座標は：$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【2 枚目につづく】

2023 年 1 月 6 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

h) ここまでの結果を反映させ，$y = f(x)$ のグラフを丁寧に描け.



$\boxed{4}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2+x+1)-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{x'\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

c) $f(x) = x\,e^{1-x^2}$

$$f'(x) = (x)'e^{1-x^2} + x(e^{1-x^2})' = e^{1-x^2} + xe^{1-x^2}(1-x^2)'$$
$$= (1-2x^2)e^{1-2x^2}$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

分子の対数の真数条件より，$x > 0$. このとき，分母は 0 にならないので，$f(x)$ の定義域は $x > 0$.

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x^2-(\log x)(x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}x^2-2x\log x}{x^4}$$
$$= \frac{x(1-2\log x)}{x^4} = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\log x = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-2\log x > 0 \Leftrightarrow \log x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{1}{2}}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ.

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

e) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ.

極大値をとる x： $x = e^{\frac{1}{2}}$

極小値をとる x： なし

f) d) の増減表を用い，$\dfrac{\log e}{e^2} < \dfrac{\log 2}{2^2}$ を示せ.

［ヒント：$\sqrt{e}$ と 2 の大きさを比較せよ.］

$\sqrt{e} < 2 < e$ であり，$f(x)$ は $x > \sqrt{e}$ において減少するので，$f(2) > f(e)$. これより直ちに $\dfrac{\log e}{e^2} < \dfrac{\log 2}{2^2}$ が導かれる.

g) f) の結果を用い，e^{2^2} と 2^{e^2} のどちらが大きいかを示せ.

$\dfrac{\log e}{e^2} < \dfrac{\log 2}{2^2}$ の両辺に 2^2e^2 をかけ，$2^2\log e < e^2\log 2$. これより，$\log e^{2^2} < \log 2^{e^2}$ が得られる. 対数 log の底は e であり，1 より大きいので，$e^{2^2} < 2^{e^2}$ が得られる.