入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

$\boxed{1}$ $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

定義域: (根号内) $\geqq 0$ より, $-2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \sqrt{4-x^2} + x\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値, 最小値を求めよ.

最大値： 2 $(x = \sqrt{2})$

最小値： -2 $(x = -\sqrt{2})$

$\boxed{2}$ 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき, その表面積 S を最小にしたい.

a) 底面の半径を r, 高さ h とするとき, S と V をそれぞれ r と h で表せ.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h$

b) S を V と r で表せ.

$V = \pi r^2 h$ より, $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

これを S の式に代入し,

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

c) S を r の関数とみて, $\dfrac{dS}{dr}$ を計算し, S の増減表を書け.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

r は正の範囲を動くので, 増減表は右の通り.

r	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dr}$		$-$	0	$+$
S		↘	最小	↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ. また, そのときの h の値も求めよ.

増減表より, S は $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき最小になる.

このとき, $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi}\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ $(= 2r)$.

(答) 半径 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, 高さ $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ のとき.

3 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

真数条件より，$x > 0$．

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ．

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$，$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

c) b) の結果を用い，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ．

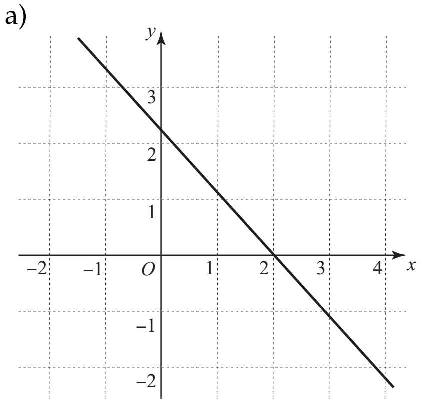
$e = 2.718\cdots < \pi = 3.14159\ldots$ だから，上の増減表より $f(e) > f(\pi)$．
これより直ちに，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ が導かれる．

d) c) の結果を用い，π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ．［ヒント：$\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ．］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に $e\pi (> 0)$ をかけて，$e \log \pi < \pi \log e$．
さらに，対数の性質を用いて $\log \pi^e < \log e^\pi$．
ここで，対数の底 e は 1 より大きいから，$\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$ が成り立つ．
したがって，$\pi^e < e^\pi$．

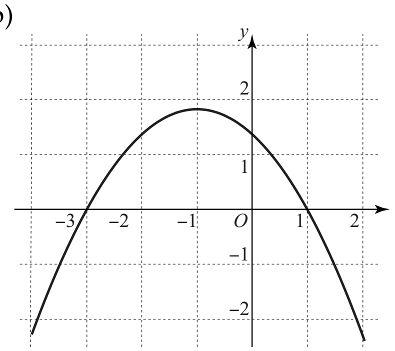
4 次の各々のグラフは導関数 $y = f'(x)$ のグラフの概形を示したものである．これをもとに，$f'(x)$ と $f''(x)$ の値の正負を読み取り，関数 $f(x)$ の増減表を書いて，$y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，極大・極小となる点，変曲点をもとめよ．（凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．）

a)



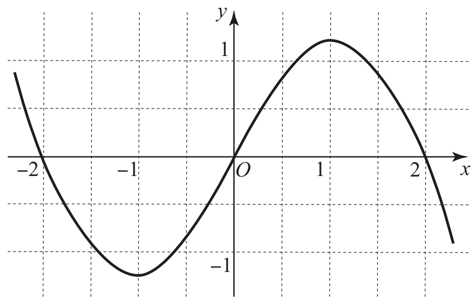
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↱	極大	⤵

b)



x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

c)



x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↱	極大	⤵	変曲点	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)