入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ 次のそれぞれの値を求めよ．

a）$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

b）$\log_{25} 5 = \log_{25} 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c）$\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

d）$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

e）$\log_5 5 = 1$

f）$\log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

g）$\log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

h）$\log_8 \sqrt{2} = \log_8 \sqrt{8^{\frac{1}{3}}} = \log_8 8^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

$\boxed{2}$ 次の式の x を求めよ．

a）$\log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$

b）$\log_4 x = -\dfrac{1}{2}$

$x = 4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

c）$\log_3 x = 2$

$x = 3^2 = 9$

d）$\log_{27} x = 3$

$x = 27^3 = (3^3)^3 = 3^9 (= 19683)$

$\boxed{3}$ 対数の定義により，$\log_a M = r$，$\log_a N = s$ であるとは $M = a^r$，$N = a^s$ が成り立つことに他ならない．そこで，$M = a^r$，$N = a^s$ とおき，指数法則を利用して，次の各々の対数の性質を証明せよ．

a）$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \log_a(a^r \times a^s) \\
&= \log_a a^{r+s} && (\because \text{指数法則}) \\
&= r + s && (\because \text{対数の定義}) \\
&= \log_a M + \log_a N \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

b）$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \log_a\left(\frac{a^r}{a^s}\right) \\
&= \log_a a^{r-s} && (\because \text{指数法則}) \\
&= r - s && (\because \text{対数の定義}) \\
&= \log_a M - \log_a N \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

c）$\log_a M^n = n \log_a M$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \log_a (a^r)^n \\
&= \log_a a^{nr} && (\because \text{指数法則}) \\
&= n4 && (\because \text{対数の定義}) \\
&= n \log_a M \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ $p = \log_a 2$，$q = \log_a 3$ とするとき，次の値を p，q で表せ．

a）$\log_a 8 = \log_a 2^3 = 3\log_a 2 = 3p$

b）$\log_a 18 = \log_a (2 \times 3^2) = p + 2q$

c）$\log_a 12 = \log_a (2^2 \times 3) = 2p + q$

d）$\log_a 1.5 = \log_a \dfrac{3}{2} = \log_a 3 - \log_a 2 = q - p$

$\boxed{5}$ 次の各々の式を計算せよ．

a）$\log_2 \dfrac{3}{4} - \log_2 \dfrac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2^2 - (\log_2 3 - \log_2 2) = -2 + 1 = -1$

b）$\dfrac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{1}{2} \log_3 5 - \left(\dfrac{1}{2} \log_3 5 - \log_3 3\right) = 1$

c）$\log_2(3 + \sqrt{5}) + \log_2(3 - \sqrt{5}) = \log_2\big((3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})\big) = \log_2(9 - 5) = \log_2 4 = 2$

d）$3\log_5 15 - \log_5 135 = 3\big(\log_5 3 + \log_5 5\big) - \log_5(27 \times 5) = 3\big(\log_5 3 + 1\big) - \big(3\log_5 3 + 1\big) = 2$

$\boxed{6}$ 次の各々の式を簡単にせよ．

a）$\dfrac{1}{3} \log_{10} 125 + \log_{10} \dfrac{3}{5} - \log_{10} 0.3 = \dfrac{1}{3} \log_{10} 5^3 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - \log_{10} \dfrac{3}{10}$
$= \log_{10} 5 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5 - (\log_{10} 3 - \log_{10} 10) = 1$

b）$\log_a \dfrac{A}{B} + \log_a \dfrac{B}{C} + \log_a \dfrac{C}{A} = \log_a\left(\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C} \cdot \dfrac{C}{A}\right) = \log_a 1 = 0$

$\boxed{7}$ 対数の定義により，$a^{\log_a b} = b$ が成り立つ．この式の両辺の c を底とする対数を取ることにより，$\log_a b$ を $\log_c a$ と $\log_c b$ で表せ．［得られた式は底の変換公式と呼ばれる．］

$a^{\log_a b} = b$ の両辺の $\log_c$ をとり $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$．これより $(\log_a b)\log_c a = \log_c b$.

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\boxed{8}$ $\log_2 3 = m$ のとき，$\log_4 6$，$\log_3 2$ を m で表せ．

a）$\log_4 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 3}{2} = \dfrac{1 + m}{2}$

b）$\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \dfrac{1}{m}$

$\boxed{9}$ 底の変換公式を用いて次の式を簡単にせよ．

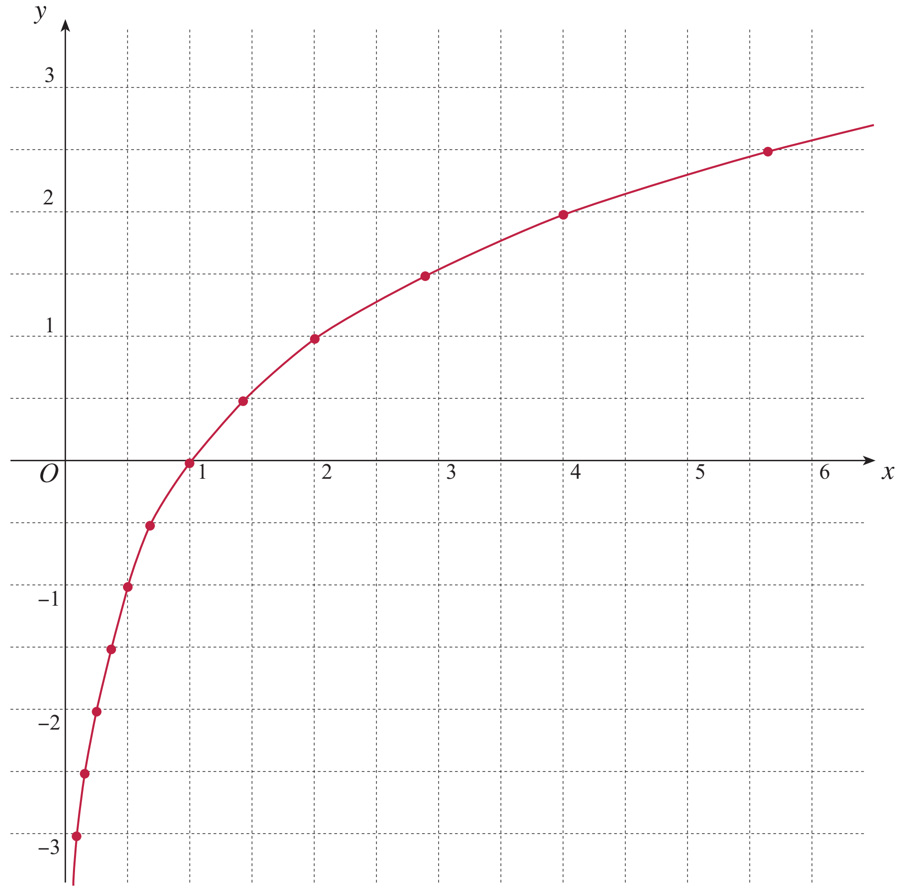
a) $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a b \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = 1$

b) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a c}$

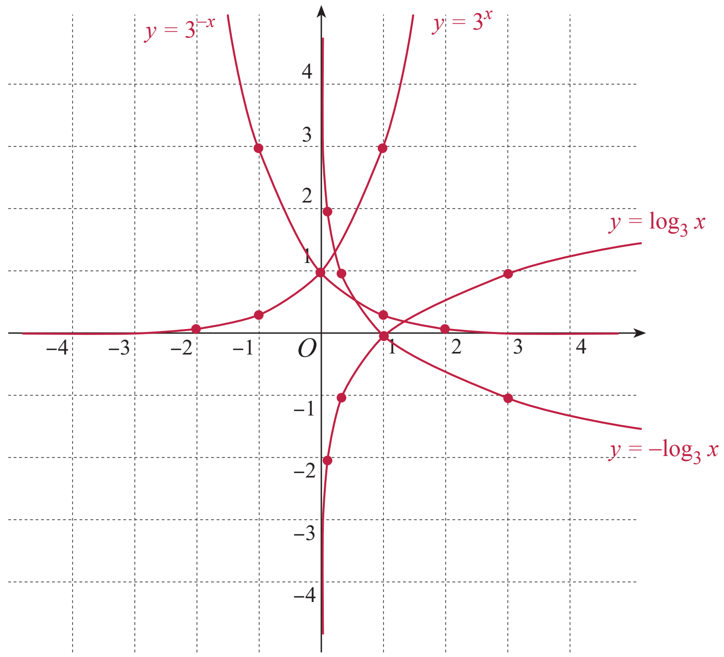
$\boxed{10}$ 関数 $y = \log_2 x$ について次の表にあてはまる x の値を小数で表せ．ただし， $2^{0.5} = 1.414$ とする．

x	0.125	0.177	0.25	0.354	0.5	0.707	1	1.414	2	2.828	4	5.656	8
y	−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

$\boxed{11}$ 前問を利用して，指数関数 $y = \log_2 x$ のグラフをできる限り丁寧に描け．



$\boxed{12}$ 4 つの関数 $y = 3^x$， $y = 3^{-x}$， $y = \log_3 x$， $y = -\log_3 x$ のグラフを描け．



$\boxed{13}$ 2^{32} は何桁の整数か．ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

$\log_{10} 2^{32} = 41 \log_{10} 2 \fallingdotseq 32 \times 0.3010 = 9.632$ なので，

$$\log_{10} 10^9 < \log_{10} 2^{32} < \log_{10} 10^{10}$$

が成り立つ．これは 2^{32} が 10 桁の数で，最高位の数字が 2 であることを示している．

$\boxed{14}$ 光線が，ある種のガラスを 1 枚透過するごとに，その光度の $\dfrac{1}{10}$ を失うという．このガラスを何枚以上重ねたものを透過すると，光度がもとの $\dfrac{1}{3}$ 以下に弱められるか．ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

1 枚投下するごとに光度は $\left(\dfrac{9}{10}\right)$ になるので， n 枚重ねたガラスを投下すると光度は元の $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ になる．これが $\dfrac{1}{3}$ 以下になればよい．

$$\left(\frac{9}{10}\right) \leqq \frac{1}{3} \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{9}{10}\right) \leqq \log_{10} \frac{1}{3} \Rightarrow n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) \leqq -\log_{10} 3$$
$$\Rightarrow n(2\log_{10} 3 - 1) \leqq -\log_{10} 3$$
$$\Rightarrow n \geqq \frac{-\log_{10} 3}{2\log_{10} 3 - 1} = \frac{-0.4771}{-0.0458} = 10.42\ldots$$

よって 11 枚以上投下すると光度が $\dfrac{1}{3}$ 以下になる．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)