2022 年 7 月 22 日

基礎数学 A1	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人													

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 次の式を展開せよ．

$(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

2 次の各式を因数分解せよ．

a) $12x^2 - 12x + 3 = 3(2x-1)^2$

b) $6a^2 + ab - 2b^2 = (3a+2b)(2a-b)$

3 $P(x) = x^3 + 8$, $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$ とする．

a) $P(x)$ を因数分解せよ．

$P(x) = (x+2)(x^2-2x+4)$

b) $Q(-1)$ を求めよ

$Q(-1) = -1-1-2+4=0$

c) $Q(x)$ を~~それぞれ~~因数分解せよ．

$Q(x) = (x+1)(x^2-2x+4)$

d) $P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．

最大公約数 $= x^2-2x+4$

最小公倍数 $= (x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$ $(= x^4+x^3+8x+8)$

4 a) 次の除法を行い，商と余りを求めよ．

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
2x^2 - 2x - 1 \,\big)\, x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\
x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x \\
\hline
-x^2 + \frac{5}{2}x - 3 \\
-x^2 + x + \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}
\end{array}$$

商 $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　　　余り $= \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

b) 上の結果を利用して次の分数式を，整式と分子が分母より低次の分数式との和の形に表せ．

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}{2x^2-2x-1}$$

5 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $\dfrac{6abc}{\frac{4bc^2}{3a}} = \dfrac{9a^2}{2c}$

b) $\dfrac{2\frac{a}{bc}}{6\left(\frac{a}{bc}\right)^2 - 2\frac{a}{bc}} = \dfrac{bc}{3a-bc}$

c) $\dfrac{3a-b}{a^2+ab-6b^2} - \dfrac{a+b}{a^2+5ab+6b^2}$

$= \dfrac{3a-b}{(a-2b)(a+3b)} - \dfrac{a+b}{(a+2b)(a+3b)}$

$= \dfrac{(3a-b)(a+2b)-(a+b)(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)(a+3b)}$

$= \dfrac{2a^2+6ab}{(a-2b)(a+2b)(a+3b)} = \dfrac{2a}{(a-2b)(a+2b)}$

d) $\dfrac{x^3+y^3}{(x-y)^2} \div \dfrac{x^3-x^2y+xy^2}{x^2-2xy+y^2} \times \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2y-y^3}$

$= \dfrac{(x+y)\cancel{(x^2-xy+y^2)}}{\cancel{(x-y)^2}} \times \dfrac{\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{x}\cancel{(x^2-xy+y^2)}} \times \dfrac{\cancel{xy}\cancel{(x+y)}}{\cancel{y}(x-y)\cancel{(x+y)}}$

$= \dfrac{x+y}{x-y}$

e) $\dfrac{2h}{\frac{1}{a-h} - \frac{1}{a+h}} = \dfrac{2h}{\frac{(a+h)-(a-h)}{(a-h)(a+h)}}$

$= \dfrac{2h}{\frac{2h}{(a-h)(a+h)}} = (a-h)(a+h)$

6 次の不等式を解け．またその解を数直線上に表せ．

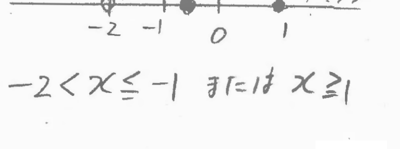
a) $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geqq 0 & \text{— ①} \\ \dfrac{2x+1}{3} < \dfrac{3x+2}{4} & \text{— ②} \end{cases}$

① $(2x+1)(x-1) \geqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq -\frac{1}{2}$ or $x \geqq 1$

② $4(2x+1) < 3(3x+2)$

$\Leftrightarrow x > -2$

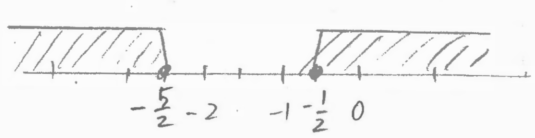


$-2 < x \leqq -1$ または $x \geqq 1$

b) $|2x+3| \geqq 2$

$-2 \geqq 2x+3$ または $2x+3 \geqq 2$

$x \leqq -\frac{5}{2}$ または $x \geqq -\frac{1}{2}$



【裏に続く】

7 消費税率が 10 %である商品の税込価格は，税抜き価格（整数の値）に 1.1 を乗じ，1 円未満の端数を切り捨てた額である．

a) 税抜価格 x（円）と税込価格 y（円）との間に成り立つ不等式を示せ．

$$0 \leqq \frac{110}{100}x - y < 1 \qquad y \leqq 1.1x < y+1$$

b) 税込価格を 298 円とするには，税抜価格をいくらに設定すれば良いか．

$$0 \leqq \frac{110}{100}x - 298 < 1 \iff 298 \leqq \frac{110}{100}x < 299$$

$$\iff 298 \times \frac{10}{11} \leqq x < 299 \times \frac{10}{11}x \iff 270.9\cdots \leqq x < 271.8\cdots$$

∴ 271円

8 a）放物線 $y = -x^2 + 3x - 1$ は，放物線 $y = -x^2$ をどのように平行移動したものかを述べよ．

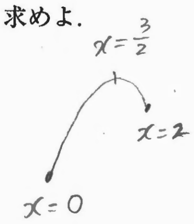
$$y = -x^2+3x-1 = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - 1$$

$$= -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

x軸方向に $+\frac{3}{2}$

y軸方向に $+\frac{5}{4}$

b) 2 次関数 $y = -x^2 + 3x - 1$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求めよ．



$$y = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$

$x = 0$ のとき最小値 -1

9 a) 2 次方程式 $4x^2 - 4x + 5 = 0$ を解け．

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{2^2-20}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{4i}{4} = \frac{1}{2} \pm i$$

b) 2 次不等式 $4x^2 - 4x - 5 \geqq 0$ を解け．

$4x^2-4x-5=0$ を解くと $x = \frac{2\pm\sqrt{4+20}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$

∴ $x \leqq \frac{1-\sqrt{6}}{2}$ または $x \geqq \frac{1+\sqrt{6}}{2}$

10 ある牛丼チェーン店では牛丼一杯 400 円のとき，一日 150 杯の売り上げがあり，価格を 10 円ずつ値下げするごとに 5 杯ずつ売り上げが増えていくという．1 日の売り上げを最大にするには一杯いくらで販売すればよいか．

x円値下げするとする

このとき $\left(150 + 5 \times \frac{x}{10}\right)$ 杯の売り上げがある

売り上げ金額yは

$$y = (400-x)\left(150+\frac{1}{2}x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 50x + 60000$$

$$= -\frac{1}{2}(x-50)^2 + 1250 + 60000$$

よって 50円値下げしたときが売り上げ最大

∴ 350円で販売すればよい

11 次の各々の式を簡単にせよ．

a) $\sqrt[3]{-\sqrt{729}} = -3$

b) $\dfrac{\sqrt{a^3b} \times \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[6]{a^2b^3}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

c) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10}\sqrt{3}} = \dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2\log_{10} 3}{\frac{1}{2}\log_{10} 3} = 4$

d) $3^{\log_3 4} = 4$

e) $\log_2 18 + \log_4 36 - \log_2 27 = \log_2 2\cdot 3^2 + \dfrac{\log_2 2^2\cdot 3^2}{\log_2 4} - \log_2 3^3$

$$= 1 + 2\log_2 3 + \frac{2+2\log_2 3}{2} - 3\log_2 3 = 2$$

f) $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{5}) + \log_2(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \log_2(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

$$= \log_2(7-5) = \log_2 2 = 1$$

12 $M = a^r$，$N = a^s$ とおき，指数法則を利用して，次の対数の性質を証明せよ．

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

左辺 $= \log_a(a^r \cdot a^s) = \log_a a^{r+s} = r+s$

右辺 $= \log_a a^r + \log_a a^s = r+s$

よって 左辺 = 右辺

13 ある種のガラスは，太陽光線が 1 枚通過するごとにその紫外線を 20% カットするという．このガラスを何枚か重ねて太陽光線の紫外線を 80% 以上カットしたい何回目重ねればよいか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

1枚通過するごとに紫外線は $\frac{8}{10}$ になるから

$$\left(\frac{8}{10}\right)^n \leqq \frac{2}{10}$$

を解けばよい。両辺の常用対数をとって

$$\log_{10}\left(\frac{8}{10}\right)^n \leqq \log_{10}\left(\frac{2}{10}\right)$$

$$n(\log_{10} 2^3 - \log_{10} 10) \leqq \log_{10} 2 - \log_{10} 10$$

$$n(3\log_{10} 2 - 1) \leqq \log_{10} 2 - 1$$

$$n \geqq \frac{\log_{10} 2 - 1}{3\log_{10} 2 - 1} = \frac{-0.699}{-0.097}$$

$$= 7.21\cdots$$

∴ 8枚以上

【2枚目につづく】

2022 年 7 月 22 日

基礎数学 A1	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名
金曜２限 担当: 鍬田 政人							

14 次の極限値を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+3} = \frac{1+1+1}{1+3} = \frac{3}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a} = \lim_{b\to a}\frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \lim_{b\to a}\frac{a-b}{ab(b-a)}$

$\displaystyle = \lim_{b\to a}\frac{-1}{ab} = -\frac{1}{a^2}$

15 関数 $f(x) = (2x-1)^2$ について，以下の問いに答えよ．

a) $x = -1$ から $x = -1 + h$ まで変化したときの $f(x)$ の平均変化率をなるべく簡単な形で表せ．

$\displaystyle\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(2(-1+h)-1)^2-(2\times(-1)-1)^2}{h}$

$\displaystyle = \frac{(2h-3)^2-3^2}{h} = \frac{4h^2-12h+9-9}{h}$

$\displaystyle = \frac{4h^2-12h}{h} = 4h-12 = 4(h-3)$

b) $f(x)$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を a) で求めた平均変化率の極限として求めよ．

$\displaystyle f'(-1) = \lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to0}(4h-12)$

$= -12$

16 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 2x - 1$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $f(x)$ の導関数を求めよ．（定義に従って計算する必要はない．）

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

b) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ．

$f'(2) = 3+1-2 = 2$, $f(2) = 2+1-4-1 = -2$

$\therefore\ y-(-2) = 2(x-2)$

$y = 2x-6$

c) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ．

$\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0$

$\Leftrightarrow (3x-4)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}, -2$

d) $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2>0 \Leftrightarrow x<-2$ または $x>\frac{4}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させ，$f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\frac{71}{27}$	$\nearrow$

極大値 = 2　　極小値 = $-\frac{71}{27}$

f) $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ をそれぞれ求めよ．

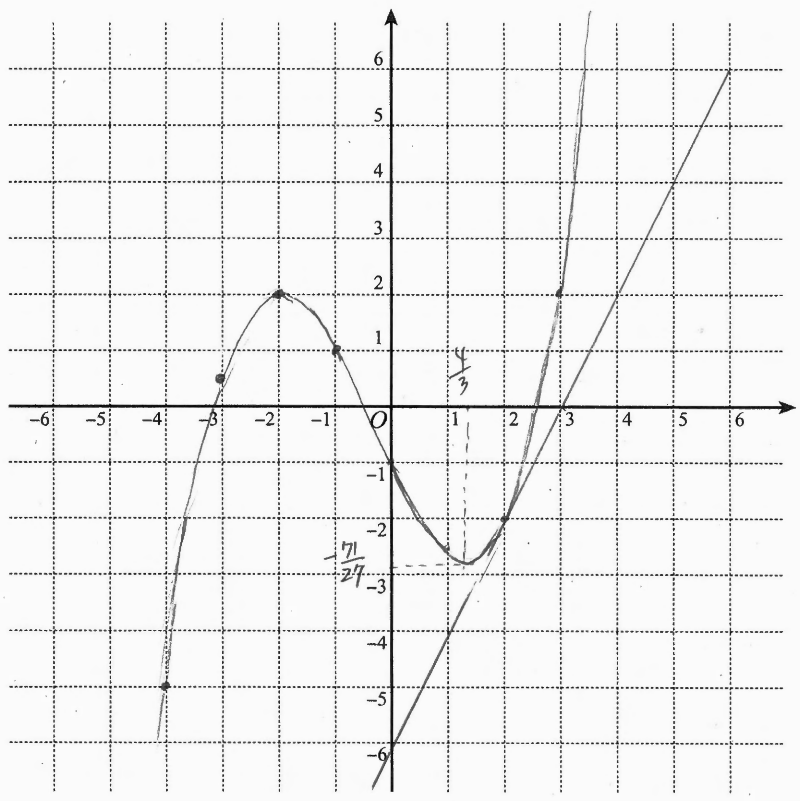
$f(-4) = -5$　　$f(0) = -1$

$f(-3) = \frac{1}{2}$　　$f(1) = -\frac{5}{2}$

$f(-2) = 2$　　$f(2) = -2$

$f(-1) = 1$　　$f(3) = 2$

g) ここまでの結果を反映させ，$y = f(x)$ のグラフと，$(2, f(2))$ における接線のグラフをなるべく丁寧に描け．



【以上】

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】