a, b を正の整数とし, $0 < b < a$ と仮定する.
このとき.

(1) $\quad a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$

をみたす整数 q, r は1通りに定まる。q, r はそれぞれ a を b で割ったときの商, 余りと呼ばれる。

(1) 式よりただちに, a と b の公約数は r を割り切り, b と r の公約数は a を割り切ることがすぐわかる。これより, a と b の最大公約数と b と r の最大公約数は一致することがわかる.

いま $a = r_0$, $b = r_1$ とおいて (1) 式を

(1) $\quad r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad (0 \leqq r_2 < r_1)$

と表し (授業とは r の添字が1つずれている),
r_n, q_n を以下のように定めていく.

(2) $\quad r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 \leqq r_3 < r_2)$

(3) $\quad r_2 = r_3 q_3 + r_4 \quad (0 \leqq r_4 < r_3)$

$\cdots$

(n) $\quad r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1} \quad (0 \leqq r_{n+1} < r_n)$

このようにして定まる数列 r_n はだんだん小さくなり, いずれ 0 になる。0 になるひとつ前の r_n を d とおくと d は r_{n-1} を割り切るので ((n) 式で $r_{n+1} = 0$ とおいて考える) r_{n-1} と r_n の最大公約数は d である。これより, 上で説明したことから r_{n-2} と r_{n-1} の最大公約数は d に一致し, これをくり返して a と b の最大公約数が d であることが結論される。

上のプロセスをユークリッドの互除法と呼ぶのであった

ユークリッドの互除法を少し拡張して

(*) $$ax+by=d$$

をみたす整数 x, y を求める方法をつくりたい。そのために

$$as_n+bt_n=r_n$$

をみたす2つの数列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ をつくることを考える。

$n=0, 1$ のときは

$$as_0+bt_0=a$$
$$as_1+bt_1=b$$

より、$s_0=1$, $t_0=0$, $s_1=0$, $t_1=0$ とすればよい。いま
$\{s_n\}$, $\{t_n\}$ が n まで定義されたとすると

$$as_{n-1}+bt_{n-1}=r_{n-1}$$
$$as_n+bt_n=r_n$$

となっている。これを

$$r_{n-1}=q_n r_n+r_{n+1}$$

に代入し、r_{n+1} を求めると

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_{n-1}-q_n r_n=(as_{n-1}+bt_{n-1})-q_n(as_n+bt_n) \\ &= a(s_{n-1}-q_n s_n)+b(t_{n-1}-q_n t_n) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} s_{n+1}=s_{n-1}-q_n s_n \\ t_{n+1}=t_{n-1}-q_n t_n \end{cases}$$

とおけば $as_{n+1}+bt_{n+1}=r_{n+1}$ が成り立つ。

いま、$r_{n+1}=0$ となったとすると $r_n=d$ だから

$$as_n+bt_n=d$$

となり (*) をみたす x、y がみつかったことになる。

r_n, q_n, s_n, t_n を計算することは Excel のワークシートで容易に行なうことができる。(参考ファイル参照)