前期のまとめと復習問題

前期は高校の数学 B で扱われているベクトルのほかに，行列と 1 次変換の基本的な性質を扱った．まず次の項目について確認して欲しい．（カッコ内は扱われている教科書のページ）

行列の和・差・実数倍（p. 28〜31）， 1 次写像と行列（p.32〜33）， 1 次写像の合成と行列の積（p. 38〜41）， 1 次変換（p. 50），いろいろな 1 次変換，とくに原点のまわりの回転（p. 53〜55），逆写像と逆行列（p. 44〜46），合成変換と逆変換（p. 56〜57）

● 復習問題

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ のとき， $AB - BA$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の行列 A について， A^2, A^3, A^4, A^6 を求めよ．

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　　c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される座標平面上の 1 次変換を f とするとき，次の問に答えよ．

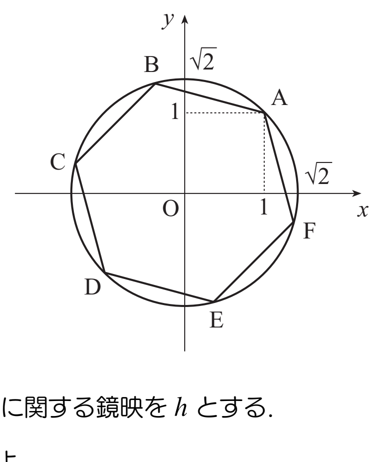
a) f によって点 $(2, 1)$ に移される点を求めよ．

b) 合成変換 $f \circ f$ によって点 $(3, -1)$ が移される点をもとめよ．

$\boxed{4}$ 行列 A で表される 1 次変換によって 2 点 $(2, 1), (3, 2)$ がそれぞれ $(4, 10), (7, 17)$ に移されるとき，行列 A を求めよ．

$\boxed{5}$ 点 $(-2, 2)$ を原点のまわりに次の角だけ回転移動した点を求めよ．

a) $30°$　　b) $45°$　　c) $120°$　　d) $150°$



$\boxed{6}$ 右の図のように，円 $x^2 + y^2 = 2$ に内接する正六角形 ABCDEF がある．点 A の座標が $(1, 1)$ のとき，残りの頂点の座標を求めよ．［ヒント：ベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{OD}$ の関係などを考えると計算を節約することが出来る．］

$\boxed{7}$ 原点の回りの $90°$ 回転を f, y 軸に関する鏡映を g，直線 $y = x$ に関する鏡映を h とする．

a) f, g, h を表す行列をそれぞれ A, B, C とする． A, B, C を求めよ．

b) 原点の回りの $90°$ 回転に引き続き y 軸に関する鏡映を行う合成変換 $g \circ f$ は、直線 $y = x$ に関する鏡映となることを行列の積を用いて示せ．

$\boxed{8}$ 直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ に関する鏡映を表す行列を求めよ．またその逆行列を求めよ．

【裏につづく】

$\boxed{9}$ a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

b) 連立一次方程式 $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ の解を a) の結果を用いて求めよ.

$\boxed{10}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP$ を計算せよ.

$\boxed{11}$ 【やや難】 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ とする.

a) A で表される 1 次変換で動かない点 (x, y) を求めよ．すなわち，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.

b) A で表される 1 次変換で原点に関して反転される点 (x, y) を求めよ．すなわち，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ.

c) A で表される 1 次変換の図形的意味を述べよ.

担当： 鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)