

3. 多変数関数の偏微分

1 ある町工場では2種類の自転車を製作している。ひとつの種類は標準モデルで、もう1種類は競技用モデルである。いま、一週間に、標準モデルを x 台、競技用モデルを y 台製作するのに

$$C(x, y) = 70 + 7x + 10y \quad (\text{千円})$$

の費用がかかるとしよう。さらに、価格と需要の関係は次の式にしたがっているとす。

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$

$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで、 x (台)、 y (台) はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要、 p (千円)、 q (千円) はそれぞれ、標準モデルと競技用モデルの値段である。

- 一週間の歳入 $R(x, y)$ を求めよ。また、 $R(25, 10)$ を計算せよ。
- 一週間に得られる利潤 $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$ を求めよ。また、 $P(25, 10)$ を計算せよ。
- 競技用モデルの毎週の生産台数が10台で一定のとき、標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか。
- 逆に、標準モデルの毎週の生産台数が25台で一定のとき、競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか。

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 y は固定して定数と見なし、 z を x の1変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の x に関する偏微分と呼ぶ。これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x, y) = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)$$

などと様々な記号で表わされる。同様にして変数 x は固定して定数と見なし、 z を y の1変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x, y)$ の y に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x, y) = f_y(x, y) = \partial_y f(x, y)$$

などと表わす。

関数 $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における偏微分係数は、極限を用いて表すと次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

- 2 a) 上の問題の $P(x, y)$ について、 $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ を求めよ。
- b) $\frac{\partial P}{\partial x}(15, 10)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(30, 10)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 10)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 15)$ の値をそれぞれ計算せよ。

c) 利潤 $P(x, y)$ が最大になるような生産台数 x, y の組を求めよ.

1変数関数の場合, 関数 $f(x)$ において, x が a から $a + \Delta x$ に変化したとき, その値は

$$f(a + \Delta x) \doteq f(a) + f'(a)\Delta x$$

と近似できるのであった. 多変数の場合には, これが偏微分を用いて拡張できる.

関数 $z = f(x, y)$ において x を a から $a + \Delta x$ に, y を b から $b + \Delta y$ に同時に変化させたとき, z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \Delta y$$

で与えられることが知られている.

3 底面の半径 r cm, 高さ h cm の直円柱の底面の半径と高さが, それぞれ, わずかに Δr cm, Δh cm ずつ増えたとき, 直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか, また表面積はどれくらい増えるか.

4 生産量 Q が資本 K と労働力 L の関数として $Q = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている.

a) $\frac{\partial Q}{\partial K}, \frac{\partial Q}{\partial L}$ を求めよ.

【注】 $\frac{\partial Q}{\partial K}$ は資本の限界生産力, $\frac{\partial Q}{\partial L}$ は労働の限界生産力と呼ばれる.

b) いま (K, L) が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき, Q の変化量の近似値を求めよ.