2. 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において，a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 h だけ変化させたときの値 $f(a+h)$ の近似値を求めることを考える．前回見たように，$f(a+h)$ は

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)$$

と漸近展開できる．一般に近似値を計算するとき，近似値と真の値との誤差 $\varepsilon(h)$ がどれくらいの範囲に収まっているかわからないと近似値は本当の価値を持たない．しかし，上の漸近展開の式では $\varepsilon(h)$ は $h \to 0$ としたときの極限については $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$ をみたすことはわかるが，h が 0 がに近づく途中の有限の値であるときに $\varepsilon(h)$ がどれくらいの大きさかなるかは何も示していない．

前回と同様に $a = 0$ の場合のみを考え，関数 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする．まず，積分 $\displaystyle\int_0^h f'(x)\,dx$ を無理やり部分積分を用いて計算する．部分積分の公式 $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ において，$u(x) = f'(x), v(x) = x - h$ と置くと

(1)
$$\int_0^h f'(x)\,dx = \Big[f'(x)(x-h)\Big]_0^h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx = f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx$$

一方，$f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ であるから

(2)
$$\int_0^h f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_0^h = f(h) - f(0)$$

と計算できる．したがって，(1)と (2)を比較することにより

(3)
$$f(h) = f(0) + f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x)\,dx$$

が得られる．さらに $u(x) = f''(x), v(x) = \dfrac{1}{2}(x-h)^2$ とおいて部分積分すると，

$$\int_0^h (x-h)f''(x)\,dx = -\frac{1}{2}f''(0)h^2 - \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$$

となり，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h (x-h)^2 f'''(x)\,dx$$

が得られる．さらに $u(x) = f'''(x), v(x) = \dfrac{1}{2\cdot 3}(x-h)^3$ とおくというように繰り返していくと，

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

が得られる．ここで，$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数である．これより，$f(h)$ は h の $n-1$ 次式で近似され，最後の積分が誤差であるとみることができる．そこで，この誤差項を次のように定義する．

$$R_n(h) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

ここで簡単のために $h>0$ と仮定し，いま $f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において，

$$m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$$

をみたすとする．（たとえば，最大値，最小値をそれぞれ M， m とすればよい．）このとき，各辺に $(h-x)^{n-1}$ を掛けて 0 から h まで積分すると，この積分区間内で $(h-x)^{n-1} \geqq 0$ だから，次の不等式が成り立つ．

$$\int_0^h (h-x)^{n-1} m\, dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\, dx \leqq \int_0^h (h-x)^{n-1} M\, dx$$

ここで， $\displaystyle\int_0^h (h-x)^{n-1} m\, dx = m\int_0^h (h-x)^{n-1}\, dx = m\Big[\frac{-1}{n}(h-x)^n\Big]_0^h = \frac{m}{n}h^n$ であることなどから

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^h (x-h)^n f^{(n-1)}(x)\, dx \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

が成り立つ．以上をまとめると次のようになる．

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし， h を正の数とする． $f(h)$ は

$$f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

と近似でき， $f^{(n)}(x)$ が $0 \leqq x \leqq h$ において， $m \leqq f^{(n)}(x) \leqq M$ をみたすとすると，その誤差 $R_n(h)$ は，次の不等式をみたす．

$$\frac{m}{n!}h^n \leqq R_n(h) \leqq \frac{M}{n!}h^n$$

例．$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の近似式を用いる．ここでは $n=3$, $h = 1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる．先ず微分を計算すると，

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!}\Big(\frac{1}{64}\Big)^2\right) = 8.0622558\ldots$$

また， $x \geqq 0$ のとき， $(1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 \leqq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち， $f'''(x)$ は $x=0$ のとき最大値 3/8 をとる．一方，最小値については正確な値はよくわからないが， 0 以上であることはすぐにわかる．この問題ではそれで十分である．）したがって，近似の誤差は，上の式を用いて

$$0 \leqq 8\,R_3\Big(\frac{1}{64}\Big) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\Big(\frac{1}{64}\Big)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより， $\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる．

担当： 鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)