入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ / 氏名

$\boxed{1}$ 不定積分 $\int x\sqrt{3x-1}\,dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ.

$3x-1=t$ とおくと，$x=\frac{t}{3}+\frac{1}{3}$. したがって，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$.

$$\int x\sqrt{3x-1}\,dx=\int\frac{t+1}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{45}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

$\sqrt{3x-1}=t$ とおくと，$x=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3}$. したがって，$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{3}$.

$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{t(t^2+1)}{3}\cdot\frac{2t}{3}\,dt=\frac{2}{9}\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{2}{45}t^5+\frac{2}{27}t^3+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ.

a) $\int x(3x+2)\,dx$　　b) $\int\frac{1}{x\log x}\,dx$

a) $\int x(3x+2)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$

b) $t=\log x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$. これより形式的に　$dt=\frac{1}{x}\,dx$.

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\left(\frac{1}{x}\,dx\right)=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\log x)+C$$

c) $\int(x+1)e^x\,dx$　　d) $\int\log(x+1)\,dx$

c) $u=x+1,\ v'=e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv'=uv-\int u'v$ を用いる．このとき $v=e^x$ だから

$$\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int 1\cdot e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

d) $u=\log(x+1),\ v'=1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v=x$ となることに注意.

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\,dx\right)dx$$
$$=x\log(x+1)-(x-\log x)+C=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

$\boxed{3}$ $\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の2次近似の式を用い $\sqrt{17}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第何位まで一致するかを答えよ.

演習プリント３の１番の問題と同様に $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおいて，高次微分による近似式で $n=3$，$h=\frac{1}{16}$ とする．まず，近似値は $\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+R_3(h)$ より，

$$\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}\fallingdotseq 4+\frac{4}{2}\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2=4.123046875$$

近似の誤差は，$0\leqq f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\leqq\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}=\frac{3}{8}$ より，

$$0\leqq 4R_3\left(\frac{1}{16}\right)\leqq 4\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{1}{16}\right)^3\fallingdotseq 0.0000610352\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$4.123046875\leqq\sqrt{17}\leqq 4.123046875+0.0000610352\ldots=4.123107910\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{17}$ の小数点以下第３位までの値は 4.123 であることがわかる．（小数第４位は０または１であることもわかる．）

$\boxed{4}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ であるが，この式で x を $-x$ に置き換えて，$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ も成り立つ．したがって，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)=x+o(x^2)$．一方，$e^x=x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ だから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(x)}{1+\frac{x}{2}+o(x)}=1$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x+\log(1-x)}$

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ より

$$\begin{cases}\log(1+x)+\log(1-x)=-x^2+o(x^3)\\ x+\log(1-x)=x+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{cases}$$

したがって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x+\log(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+o(x)}{-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+o(x)}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$$

5 つぎの 2 変数関数について，各変数に関する偏微分を計算せよ．

a） $f(x,y)=x^4-4x^2y^2+3xy^3-y^4+3$　　b） $f(x,y)=(x+2y^2+1)^3$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-8xy^2+3y^3$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-8x^2y+9xy^2-4y^3$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x+2y^2+1)^2$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=12y(x+2y^2+1)^2$.

c） $f(x,y)=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$　　d） $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$.

6 次の関数の臨界点を求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

a） $f(x,y)=x^3-6x^2+x^2y^2-y^2$

まず，臨界点（偏微分がともに 0 になる点）を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12x+2xy^2=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y-2y=0$$

を解く． 2 番目の式から $y(x-1)(x+1)=0$ が得られるので， $y=0$， $x=1$， $x=-1$ をそれぞれ最初の式に代入し， $(x,y)=(0,0)$， $(4,0)$， $(1,\pm3\sqrt{2}/2)$， $(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に $D(x,y)$ を計算し，極大・極小の判定法を用いる．

$$\begin{aligned}D(x,y)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2=(6x-12+2y^2)(2x^2-2)-(4xy)^2\\&=4(3x^3-6x^2-3y^2x^2-y^2-3x+6)\end{aligned}$$

- $D(0,0)=24>0$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-12<0$ であるから， $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大.
- $D(4,0)=360>0$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=12>0$ であるから， $f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小.
- $D(1,\pm3\sqrt{2}/2)=-72<0$ なので， $(1,\pm3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）．
- $D(-1,\pm\sqrt{30}/2)=-120<0$ なので， $(-1,\pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）．

b） $f(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

まず，臨界点を求めると，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}=0\\ \iff\ & 1-x^2+y^2=0\quad \text{かつ}\quad -2xy=0\\ \iff\ & (x,y)=(1,0)\quad\text{または}\quad(-1,0)\end{aligned}$$

$D(x,y)$ を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D(1,0)=\dfrac{1}{4}>0$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=-\dfrac{1}{2}<0$ であるから， $f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大.
- $D(-1,0)=\dfrac{1}{4}>0$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)=\dfrac{1}{2}>0$ であるから， $f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小.

c） $f(x,y)=(x-y)e^{xy}$

まず，臨界点を求めると，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1+xy-y^2)e^{xy}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(-1+x^2-xy)e^{xy}=0\\ \iff\ & 1+xy-y^2=0\quad\text{かつ}\quad -1+x^2-xy=0\\ \iff\ & (x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad\text{または}\quad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{4}{e}<0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）.
- $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{4}{e}<0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)