

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 関数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$  の臨界点をすべて求め、各臨界点において極大・極小を判定せよ。  
 まず2階までの偏導関数を計算する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

臨界点を求めるために連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 3(y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$

を解くと、 $(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$  の4点が臨界点であることがわかる。

(a)  $(x, y) = (1, 1)$ .

$$D(1, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 = 36 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$$

より、 $(1, 1)$  で極小。

(b)  $(x, y) = (1, -1)$ .

$$D(1, -1) = -36 < 0$$

より、 $(1, -1)$  は鞍点。

(c)  $(x, y) = (-1, 1)$ .

$$D(-1, 1) = -36 < 0$$

より、 $(-1, 1)$  は鞍点。

(d)  $(x, y) = (-1, -1)$ .

$$D(1, 1) = 36 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$$

より、 $(-1, -1)$  で極大。

2 条件  $x^2 + y^2 = 1$  のもとで、関数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$  の最大値・最小値を求めよ。

$L(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 - 3x - 3y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$  とおく。偏微分を計算し、それぞれを0とおくと、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 - 3 - \lambda(2x) = 0 & \dots \text{①} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 3y^2 - 3 - \lambda(2y) = 0 & \dots \text{②} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 & \dots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①より } 3x^2 - 3 = \lambda(2x) \quad \dots \text{①}'$$

$$\text{②より } 3y^2 - 3 = \lambda(2y) \quad \dots \text{②}'$$

$$\frac{\text{①}'}{\text{②}'} \text{より } \frac{3x^2 - 3}{3y^2 - 3} = \frac{\lambda(2x)}{\lambda(2y)} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = \frac{x}{y} \Rightarrow y(x^2 - 1) = x(y^2 - 1) \Rightarrow (xy + 1)(x - y) = 0$$

$xy = -1$  のとき、 $y = -\frac{1}{x}$  を③に代入すると  $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = 0$  となる。この分母を払うと  $x^4 - x^2 + 1 = 0$  となるが、この方程式には実数解がない。

$x = y$  のとき、 $y = x$  を③に代入すると  $2x^2 - 1 = 0$  より、 $x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

より、

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ で最大値 } \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ で最小値 } -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$