

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1  $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}}$  という表示と  $\sqrt{1+x}$  の2次近似の式を用い  $\sqrt{27}$  の近似値を求めよ。また、このようにして得られた近似値と  $\sqrt{27}$  の値とは小数第何位まで一致するといえるか。

$f(x) = \sqrt{1+x}$  において上の高次微分による近似式の  $n = 3$ ,  $h = \frac{8}{100}$  の場合を用いる。

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

より、

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4 \times 2!}h^2 + R_3(h)$$

であり、また、 $x \geq 0$  のとき、 $(1+x)^{5/2} \geq (1+0)^{5/2} = 1$  であるから、

$$0 \leq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

すなわち、 $f'''(x)$  は  $x = 0$  のとき最大値  $3/8$  をとる。一方、最小値については正確な値はよくわからないが、0以上であることはすぐにわかる。

したがって、近似値は

$$\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}} \approx 5 + \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{100} - \frac{5}{8} \left(\frac{8}{100}\right)^2 = 5.1960$$

で、近似の誤差は、

$$0 \leq 5 R_3\left(\frac{8}{100}\right) \leq 5 \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!} \left(\frac{8}{100}\right)^3 \approx 0.000160 \dots$$

と評価できる。すなわち、

$$5.1960 \leq \sqrt{27} \leq 5.1960 + 0.000160 = 5.196160 \dots$$

となる。これより、 $\sqrt{27}$  の小数点以下第3位までの値は5.196であることがわかる。

2  $f(x) = e^x$ ,  $h = 1$ ,  $n = 6$  として  $e$  の近似値を求め、誤差の範囲を評価せよ。

$f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $f^{(n)}(0) = 1$  なので、

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + R_6(h)$$

$h \geq 0$  のとき、 $f^{(n)}(x) = e^x$  は  $0 \leq x \leq h$  では  $x = 0$  のとき最小値1,  $x = h$  のとき最大値  $e^h$  をとる。

$h = 1$  とすると、

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71666667 \dots$$

であり、誤差は

$$\frac{1}{6!} = 0.00138889 \dots \leq R_6(1) \leq \frac{e}{6!} \leq \frac{3}{6!} = 0.00416667 \dots$$

と評価できる。これより、

$$2.71806 \dots \leq e \leq 2.72083 \dots$$

したがって、 $e$  の近似値は小数第1位まで正しいことがわかる。第3位は1か2はこれでは判断できない。

3 a)  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  とし,  $f'(x), f''(x), f'''(x)$  を計算せよ.

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'''(x) = \frac{5}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

b)  $\alpha$  を正の実数とすると,  $\sqrt[3]{1+\alpha}$  の 2 次の近似式  $f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2$  を求めよ. またこのときの誤差の範囲を評価せよ.

$$f(\alpha) = f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2 = 1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 + R_3(\alpha)$$

とすると,  $0 < x < \alpha$  のとき  $0 \leq (1+x)^{-\frac{8}{3}} \leq 1$  だから, 次の不等式 (評価式) が成り立つ.

$$0 \leq R_3(\alpha) \leq \frac{f'''(0)}{3!}\alpha^3 = \frac{5}{81}\alpha^3.$$

c)  $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$  という表示を用いて  $\sqrt[3]{9}$  の近似値を計算せよ. また, このようにして得られた近似値と  $\sqrt[3]{9}$  の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

$1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{9}$  に  $\alpha = \frac{1}{8}$  を代入して実際に計算すると

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\left(1 + \frac{1}{3 \times 8} - \frac{1}{9 \times 8^2}\right) = 2.07986111\dots$$

このとき誤差は

$$2 \times R_3(\alpha) = 2 \times \frac{5}{81} \times \frac{1}{8^3} = 0.00024112\dots$$

より小さいから,

$$2.07986 \leq \sqrt[3]{9} \leq 2.07986111\dots + 0.00024112\dots = 2.08010223\dots$$

したがって, 2.07986 は  $\sqrt[3]{9}$  と小数第 1 位の 0 まで一致しているはずである. (しかし, これだけでは  $\sqrt[3]{9} = 2.07\dots$  なのか  $\sqrt[3]{9} = 2.08\dots$  なのかは判定できない.)