

復習問題 略解

1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h^2 - 4h}{4(2+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 4}{4(2+h)^2} = \frac{-4}{4 \times 2^2} = -\frac{1}{4}$

2 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2}{3}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$ c) $y = 2x - 3$ d) 別紙参照

3 a) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\sqrt{3} + 1$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$ c) $y = -x$ d) 別紙参照

4 a) 別紙グラフより, $0 < x < 1, 2 < x$ b) 別紙グラフより, $x \leq 1$

5 a) $(g \circ f)(x) = 1 + a - ax, (f \circ g)(x) = -\frac{x}{a}$.

b) $1 + a - ax = x$ がすべての x になつて成り立たなければ行けないので, $a = -1$. (このとき $(f \circ g)(x) = x$ も成り立っていることに注意.)

6 a) 定義域 $x \neq -2$, 値域 $y \neq 2$; 逆関数 $f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}$, 逆関数の定義域 $x \neq 2$, 値域 $y \neq -2$.

b) 定義域 $x \leq 2$, 値域 $y \leq 0$; 逆関数 $f^{-1}(x) = 2 - x^2$, 逆関数の定義域 $x \leq 0$, 値域 $y \leq 2$.

7 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f'(x) = 3(4x+5)(2x^2+5x-6)^2$ b) $f'(x) = (x-1)^4 + 4x(x-1)^3$

c) $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-3)^3}$ d) $f'(x) = \frac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{2-x}}$ f) $f'(x) = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{(x+4)^4}}$

g) $f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$ h) $f'(x) = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

i) $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

8 a)

x	...	$-\frac{3}{2}$...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	変曲点	↘

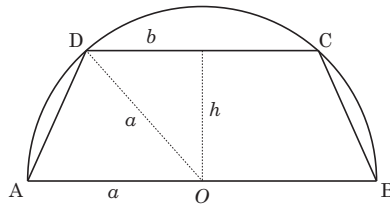
b) 極大: $x = -\frac{3}{2}$, 極小: なし [$f'(0) = 0$ であるが, $x = 0$ では極小でも極大でもないことに注意.]
変曲点: $x = -1, 0$.

9 別紙グラフ参照

10 a) 最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき), 最小値 -1 ($x = -1$ のとき).

b) 最大値 $e^{-2} = 0.135335\dots$ ($x = 1$ のとき), 最小値 -1 ($x = 0$ のとき).

11 台形の高さを h とし, 上底の長さ (辺 CD の長さ) を $2b$ とおくと, 図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ.



したがって, $b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる. このとき, $S = \frac{2a + 2b}{2}h$ であるから, $S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$.

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが, $a\sqrt{a^2 - h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を2乗して整理することにより, $4h^4 = 3a^2h^2$ を得る. $h > 0$ であることに注意して $\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき. $0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば (省略), $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり, S の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

12 a) 真数条件 $1 + x > 0$ より, $x > -1$.

b) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ であり, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 増減表を書くと,

x	-1	\dots	0	\dots
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	\nearrow	最大	\searrow

これより, $f(x)$ は $x = 0$ のとき最大で, 最大値は $f(0) = 0$.

c) $f(x)$ の $x > -1$ における最大値が 0 であるということは, $x > -1$ において $f(x) \leq 0$ が成り立つことを意味する. これより, $\log(1+x) \leq x$ が $x > -1$ において成り立つことが示される.