入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

a を 1 でない正の定数とするとき，a を底とする x の指数関数

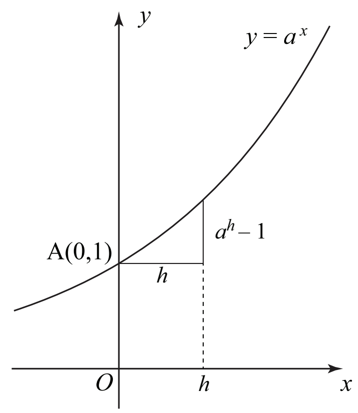
$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい．いま，x が $x+h$ まで変化したときの $f(x) = a^x$ の平均変化率を指数法則を用いて変形すると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

となる．したがって

(1) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$



が得られる．ここで，極限

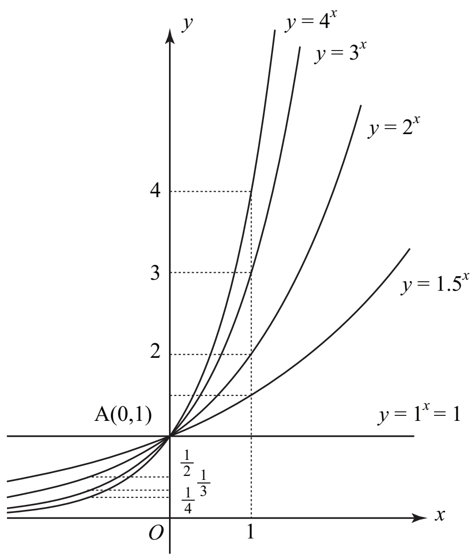
(2) $$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$$

は $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{a^{0+h}-a^0}{h}$ に等しく，曲線 $y = a^x$ の上の点 A(0, 1) における接線の傾きにほかならない．いま，それを m_a で表すことにすれば，(1) から

(3) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot m_a$$

が導かれ，$m_a = f'(0)$ がわかれば $f'(x)$ が計算できたことになる．

そこで，極限 (2) の値がどのようになるかを考える．右の図を見ると，曲線 $y = a^x$ の上の点 A(0, 1) における接線の傾き m_a は，a が大きくなるほど大きくなることがわかる．そこで実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに $\dfrac{a^h-1}{h}$ の値の数値計算をしてみよう．スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて，右のページの表を作ってみよう．大抵のスマートフォンの関数電卓アプリでは有効数字 16 桁の計算ができるので，できる限りくわしく計算してみてほしい．



例えば $\dfrac{2^{0.01}-1}{0.01}$ を計算するには $(2^{0.01}-1)\times 100$ を計算すればよいので，シンプルな関数電卓（例えば iPhone の電卓アプリ）では次の順序で入力すればよい．

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
0.1	0.717734625362932 . . .	1.161231740339044 . . .
0.01	0.695555005671881 . . .	1.104669193785359 . . .
0.001		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		
10^{-7}		
10^{-8}		
10^{-9}		
10^{-10}		

この表より $\dfrac{2^h-1}{h}$，$\dfrac{3^h-1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ，その値は次のように推測できる．

$$m_2 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}, \qquad m_3 = \lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}$$

【裏に続く】

前ページの結果を見ると $m_2 < 1$ かつ $m_3 > 1$ であることがわかる．したがって，2 と 3 の間に $m_a = 1$ となるような a の値があるだろうと考えられる．実は，$m_a = 1$ となるような a の値は単純な有理数ではないこと知られているので，そのような数を e という文字で表し，Nepier の数とか，自然対数の底と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である．

(4) $$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

すると (4) から，$f(x) = e^x$ ならば $f'(x) = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ が得られる．

> 指数関数の e^x の導関数：　$(e^x)' = e^x$

$\boxed{1}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a} = a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$ である．そこで，$y = e^u$，$u = (\log a)x$ とおいて，合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意．］

$\boxed{2}$ $f(x) = e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x) = \log x$ である．そこで，$f'(x) = e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x) = \log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること，すなわち $(\log x)' = \frac{1}{x}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ 前問によれば，$f(x) = \log x$ としたとき，$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \log(1+h) \right) = \lim_{h \to 0} \left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \log\left(\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right)$$

である．（最後の等号は $\log$ が連続関数なので $\log$ と $\lim\limits_{h \to 0}$ の順序が入れ替えらることによる．）よって，

$$f'(1) = \log\left(\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = 1$$

となり，$\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ は $\log$ をとると 1 になるような値，すなわち，

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

となる．そこで，次の表を用い $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算してみよう．$h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 10^{-9}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim\limits_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	2.5937424601
0.01	2.70481382941526...
0.001	.
10^{-4}	.
10^{-5}	.
10^{-6}	.
10^{-7}	.
10^{-8}	.
10^{-9}	.
↓	↓
0	.

これより，$e = \boxed{}$ と推測される．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)