入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

以下の問題は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について， $f_n(x) = x^n$ とおく．すなわち， $f_1(x) = x$， $f_2(x) = x^2$， $f_3(x) = x^3, \ldots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき， $f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき． $f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると， $f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま， $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \left(f_1(x)f_k(x)\right)' = f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x)$$
$$= 1\cdot x^k + x\cdot kx^{k-1}$$
$$= x^k + kx^k$$
$$= (k+1)x^k$$

ゆえに $n=k+1$ のときも $f_n'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つ

以上 (Ⅰ),(Ⅱ) あわせて $f_n'(x) = nx^{n-1}$ がすべての自然数 n について成り立つことが証明された。

［結論まできちんと述べよ．］

$\boxed{2}$ 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

b) a) の結果を利用して $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ．

$$(x^{-n})' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1}$$

$\boxed{3}$ 【$a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

$f(x) = x^n$ とすると $f'(x) = nx^{n-1}$ ， $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\therefore\ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-(1-\frac{1}{n})}$$
$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$\boxed{4}$ 【a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ．［ヒント： $f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として， $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

$f(x) = x^m$， $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ とおくと $f(g(x)) = x^{\frac{m}{n}}$.

$f'(x) = mx^{m-1}$， $g(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ だから

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}\,x^{\frac{1}{n}(m-1)}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

($y = u^m$， $u = x^{\frac{1}{n}}$ とおくと $y = x^{\frac{m}{n}}$ で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{1}{n}(m-1)}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}$$)

$\boxed{5}$ $x \neq 1$ で，n が自然数のとき，$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ．この両辺を x について微分することにより，$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ．

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1}) \times (-1)}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{(n + 1 - 1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

$$\therefore \quad 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

$\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の導関数を求めよ．

a) $((f(x))^n)' = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

$$\left(y = u^n,\ u = f(x),\ \frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \cdot f'(x) \text{ より} \right)$$

b) $(\sqrt{f(x)})' = \left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} f(x)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot f'(x)$

$$= \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^{4-1} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)'$$

$$= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 \cdot (x^2 + 2)$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$$f'(x) = \left((x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^2 - 2x)'$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \times (2x - 2)$$

$$= -(x - 1) \cdot (x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1 - x}{(x^2 - 2x)\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$\boxed{8}$ 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば，その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し，もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，次の等式を証明せよ.

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$(f(x)g(x))'' = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))'$$

$$= (f'(x)g(x))' + (f(x)g'(x))'$$

$$= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)