入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$，$u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

$$x \text{ の増分 } \Delta x \text{ に対する } u \text{ の増分を } \Delta u,$$
$$u \text{ の増分 } \Delta u \text{ に対する } y \text{ の増分を } \Delta y$$

とする．すなわち，

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x),$$
$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と定義する．ここで，求めたいのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ としたときの極限である．$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は少々無理矢理 Δu を間に挟むと，

(∗)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．この両辺の $\Delta x \to 0$ とした極限を考える．ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\boxed{\Delta u\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dy}{du}}\cdot\boxed{\frac{du}{dx}}$$

合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\big(f\big(g(x)\big)\big)'$ は

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$u = g(x)$ としたとき，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ であったから，

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける．したがって，$g(x+\Delta x)$，$g(x)$ をそれぞれ，$u+\Delta u$，u で置き換えて

$$f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big) = \boxed{f(u+\Delta u) - f(u)}$$

と書くことができる．そして，(∗) と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{g(x+\Delta x) - g(x)}}{\Delta x}$$

となる．この両辺において $\Delta x \to 0$ とすると，$\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \boxed{f'(u)},\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{g'(x)}$$

だから，

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{f'(u)}\cdot\boxed{g'(x)}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{f'(g(x))\,g'(x)}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは，$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで，$f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺} = \boxed{f'(g(x))\,g'(x)},\qquad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから，

$$\boxed{f'(g(x))\,g'(x)} = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x) = \frac{1}{\boxed{f'(g(x))}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$，$g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\boxed{f'(f^{-1}(x))}}$$

1 $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ.

$g(x) = G(x)$ とおくと $G'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x)$

$$(f(g(h(x))))' = (f(G(x)))' = f'(G(x))\,G'(x)$$
$$= f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

2 $(g(x)^2)'$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ とおくと $g(x)^2 = f(g(x))$, $f'(x) = 2x$

$$(g(x)^2)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x) = 2g(x)g'(x)$$

3 $f(x) = x^2$ としたとき, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である. 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt{x})'$ を求めよ.

$f'(x) = 2x$ だから

$$(\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4 前問と同様にして $(\sqrt[3]{x})'$ を求めよ.

$f(x) = x^3$ とおくと $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = 3x^2$

$$(\sqrt[3]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = u^3 \\ u = 1-2x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = -4x$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\times(-4x)$$
$$= -12x(1-2x^2)^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{u} \\ u = v^2 \\ v = 4x+3 \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{du}{dv} = 2v, \quad \frac{dv}{dx} = 4$$

$\begin{cases} y = \frac{1}{u^2} \\ u = 4x+3 \end{cases}$ としてもよい

$$f'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{u^2}\cdot 2v\cdot 4$$
$$= \frac{-8(4x+3)}{(4x+3)^4} = \frac{-8}{(4x+3)^3}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{u} \\ u = v^3 \\ v = x^2+1 \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{du}{dv} = 3v^2, \quad \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{u^2}\cdot 3v^2\cdot 2x$$
$$= -\frac{6x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^6} = -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = u^3 \\ u = x^2 - \frac{1}{x} \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 3u^2\times\left(2x+\frac{1}{x^2}\right) = 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = (x\sqrt{x+1})'$$
$$= (x)'\sqrt{x+1} + x(\sqrt{x+1})'$$
$$= \sqrt{x+1} + x\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \left((\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ より}\right)$$
$$= \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = \sqrt{u} \\ u = 9-x^2 \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\times(-2x)$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{u} \\ u = x^2-x+1 \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x-1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}\cdot(2x-1) = \frac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) =$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{u} \\ u = \sqrt{v} \\ v = 1-x^2 \end{cases} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}, \quad \frac{dv}{dx} = -2x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(-2x)$$
$$= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)