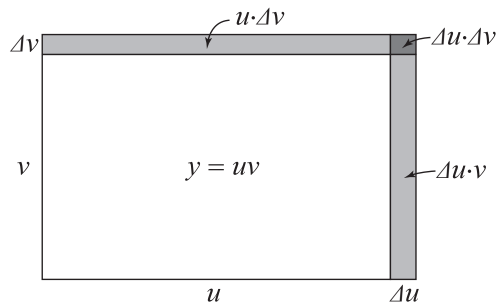
入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

● 積の微分公式

2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．
x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表す．
いま，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．
x が $x + \Delta x$ に変化したとき

$$u \longrightarrow u + \Delta u, \quad v \longrightarrow v + \Delta v$$

と変化するので，



$$y = uv \longrightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する．したがって，y の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

と表せる．これを展開して整理すると，

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \cdot \Delta v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{\Delta u}{\Delta x}} \cdot v + u \cdot \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta x}} + \boxed{\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}}$$

ここで $\Delta x \to 0$ として $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．まず，導関数の定義より，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である．また，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \boxed{\frac{dv}{dx}}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \big(f(x)g(x)\big)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の積の微分公式が得られる．

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

● 商の微分公式

次に，2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の商として表される関数 $y = \dfrac{u}{v}$ の導関数を求めたい．前と同様に，x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表し，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．
前の場合と同様に，x が $x + \Delta x$ に変化したとき，$u \longrightarrow u + \Delta u$，$v \longrightarrow v + \Delta v$ と変化するので，

$$y = \frac{u}{v} \longrightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する．したがって，y の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる．これを通分し，整理すると，

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\boxed{\Delta u}}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\boxed{\Delta v}}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．この式で $\Delta x \to 0$ として $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．まず，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)v = v^2$ が成り立つ．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\dfrac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \boxed{\dfrac{dv}{dx}}}{v^2}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の商の微分公式が得られる．

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$\boxed{1}$ $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ．

$G(x) = g(x)h(x)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x)h(x))' &= (f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)G'(x) \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g(x)h(x))' \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)) \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2 - x + 1)'(x+1) + (x^2 - x + 1)(x+1)' \\
&= (2x-1)(x+1) + (x^2 - x + 1) \\
&= 2x^2 + x - 1 + x^2 - x + 1 \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

$$
f'(x) = \frac{-(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{-3}{(3x-2)^2}
$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$$
f'(x) = \frac{-(6x^3)'}{(6x^3)^2} = \frac{-18x^2}{36x^6} = \frac{-1}{2x^4}
$$

d) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+5}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-5)'(x^2+5) - (x-5)(x^2+5)'}{(x^2+5)^2} \\
&= \frac{x^2+5 - 2x(x-5)}{(x^2+5)^2} \\
&= \frac{-x^2+10x+5}{(x^2+5)^2}
\end{aligned}
$$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x(x^2+1 - (x^2-1))}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{4x}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{x^2-x+1 - x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ 積の微分公式を用い，関数 $f(x)^2g(x)$ の導関数 $\big(f(x)^2g(x)\big)'$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
(f(x)^2g(x))' &= (f(x)^2)'g(x) + f(x)^2g'(x) \\
&= (f'(x)f(x) + f(x)f'(x))g(x) + f(x)^2g'(x) \\
&= 2f(x)f'(x)g(x) + f(x)^2g'(x)
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ 底面の半径が r で，高さが h の直円錐がある． r， h が時間 t とともに変化するとき，この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\dfrac{dV}{dt}$ を $r, h, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{dh}{dt}$ を用いて表せ．

$$
V = \frac{1}{3}\pi r^2 h
$$

$V = V(t)$, $r = r(t)$, $h = h(t)$ と書くと

$$
V(t) = \underbrace{\frac{1}{3}\pi}_{\text{定数}} r(t)^2 h(t)
$$

$\boxed{3}$ の結果を応用し

$$
V'(t) = \frac{1}{3}\pi\left(2r(t)r'(t)h(t) + r(t)^2h'(t)\right)
$$

$$
\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right)
$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)