

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 次の二つの関数 $f(x), g(x)$ を合成し, $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ.

a) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$$

b) $f(x) = \frac{6}{3-x}, g(x) = \frac{-3x}{2-x}$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{6}{3-x}\right) = \frac{-3\left(\frac{6}{3-x}\right)}{2 - \left(\frac{6}{3-x}\right)} = \frac{-18}{2(3-x) - 6} = \frac{-18}{-2x} = \frac{9}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{-3x}{2-x}\right) = \frac{6}{3 - \left(\frac{-3x}{2-x}\right)} = \frac{6(2-x)}{3(2-x) + 3x} = 2 - x$$

c) $f(x) = x + 1, g(x) = |x| + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = |x+1| + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(|x| + 1) = |x| + 2$$

d) $f(x) = 4^x, g(x) = \log_2 x$

$$(g \circ f)(x) = g(4^x) = \log_2 4^x = x \log_2 4 = 2x$$

$$(f \circ g)(x) = f(\log_2 x) = 4^{\log_2 x} = (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2 \log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = x^2 \quad (2^{\log_2 x} = x \text{ 注意})$$

2 $f(x) = 1 - x, g(x) = \frac{1}{1-x}, h(x) = \frac{1}{x}$ とする.

a) 合成関数 $(f \circ g)(x)$ と $(g \circ h)(x)$ を求めよ.

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$(g \circ h)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

b) $((f \circ g) \circ h)(x)$ と $(f \circ (g \circ h))(x)$ を求め, 両者が一致することを示せ.

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{1-x}$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\therefore ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

3 $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ とする.

a) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ.

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \text{ とおいて } x \text{ について解くと } xy - 3y = 2x + 1 \Rightarrow (y-2)x = 3y + 1$$

$$\therefore x = \frac{3y+1}{y-2} \text{ (ただし } y \neq 2 \text{ のとき解あり)}$$

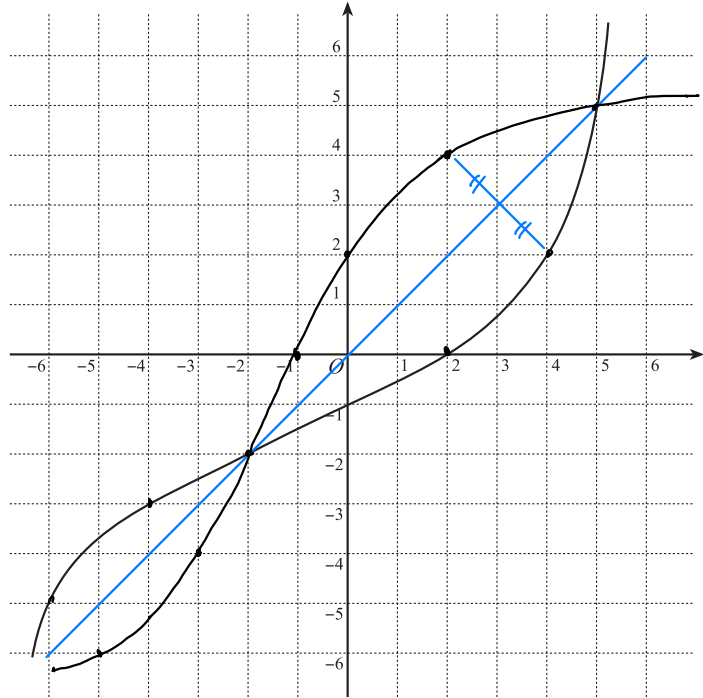
$$\therefore \text{逆関数は } f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2} \text{ である. } \therefore x \text{ と } y \text{ を入れ換えて } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

b) $(f^{-1} \circ f)(x)$ と $(f \circ f^{-1})(x)$ をそれぞれ計算せよ.

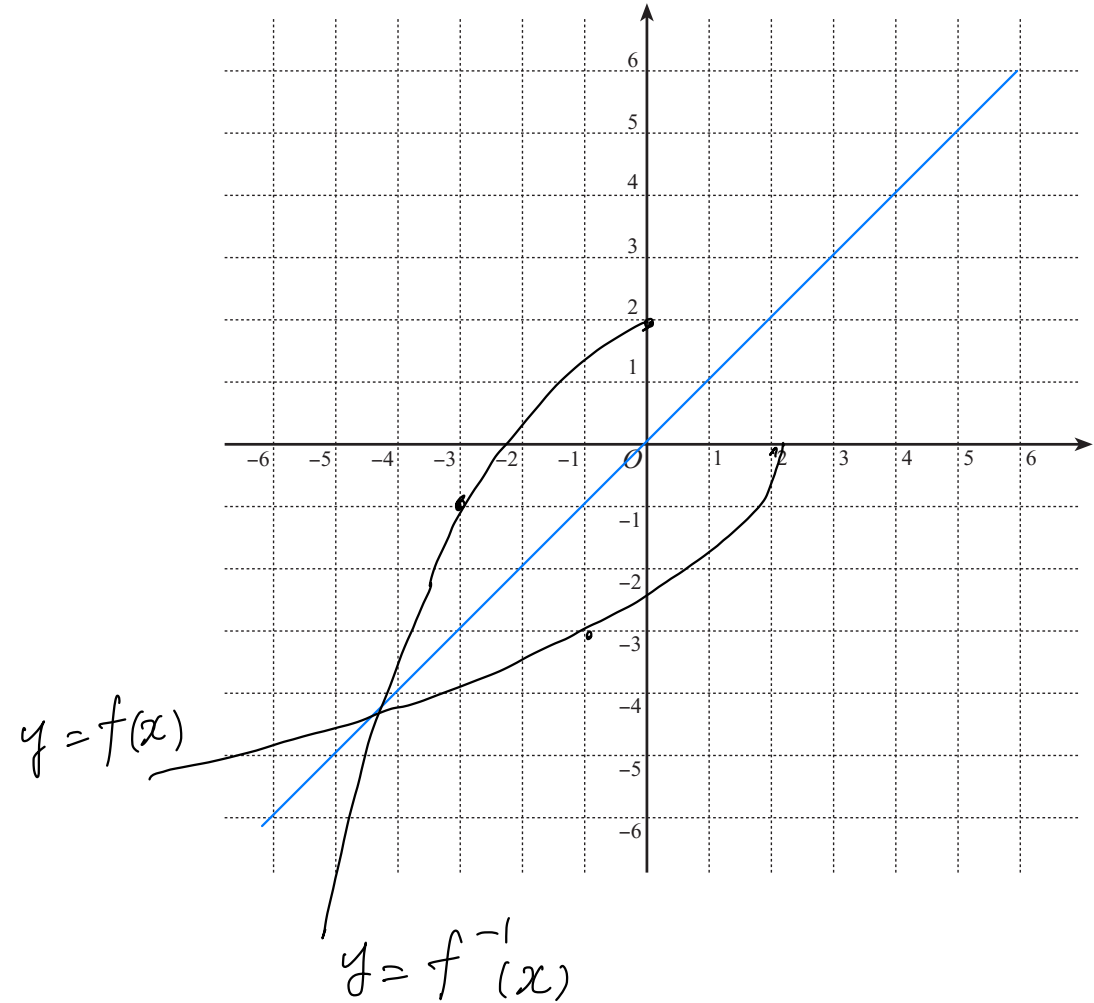
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) + 1}{\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - 2} = \frac{6x+3+x-3}{2x+1-2x+6} = \frac{7x}{7} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) + 1}{\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) - 3} = \frac{6x+2+x-2}{3x+1-3x+6} = \frac{7x}{7} = x$$

4 下の図のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフである。その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して線対称移動したものである。 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを下の図に書き込め。



d) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け。



5 $f(x) = -\sqrt{-3x+6}$ とする。

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を示せ。

定義域: $-3x+6 \geq 0$ より $x \leq 2$

値域: $y \leq 0$

b) 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。

$y = -\sqrt{-3x+6}$ の両辺を2乗して $y^2 = -3x+6$

\therefore x について解くと $x = -\frac{1}{3}y^2 + 2$

\therefore x と y を入れ換えると $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

x と y は
入れ換え。

c) $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を示せ。

定義域 $x \leq 0$

値域 $y \leq 2$