2019 年 7 月 16 日

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人							

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

1 $f(x) = \dfrac{-3x+7}{x-3}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を求めよ.

$x \neq 3 \quad (\{x \mid x \neq 3\})$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を求めよ.

$y = \dfrac{-3x+7}{x-3} \Rightarrow (x-3)y = -3x+7$

$\Rightarrow (y+3)x = 3y+7 \Rightarrow x = \dfrac{3y+7}{y+3}$

x と y を入れ換えて $y = \dfrac{3x+7}{x+3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{3x+7}{x+3}$. 定義域 $x \neq -3$

c) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の値域を求めよ.

$y = f(x)$ の値域： $y \neq -3$

$y = f^{-1}(x)$ の値域： $y \neq 3$

d) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成り立つことを示せ.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \dfrac{3\frac{-3x+7}{x-3}+7}{\frac{-3x+7}{x-3}+3}$

$= \dfrac{3(-3x+7)+7(x-3)}{-3x+7+3(x-3)} = \dfrac{-2x}{-2} = x$

e) $y = f(x)$ のグラフは $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である．k，p，q は何かを答えよ.

$y = \dfrac{-3x+7}{x-3} = -3 + \dfrac{-2}{x-3}$

$$\begin{array}{r} -3 \\ x-3 \overline{) -3x+7} \\ \underline{-3x+9} \\ -2 \end{array}$$

$k = -2,\ p = 3,\ q = -3$

f) x が 2 から $2+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ.

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\frac{-3(2+h)+7}{(2+h)-3} - \frac{-3\times2+7}{2-3}}{h}$

$= \dfrac{1}{h} \times \left(\dfrac{1-3h}{-1+h} - (-1)\right) = \dfrac{1}{h}\ \dfrac{1-3h+(-1+h)}{-1+h}$

$= \dfrac{1}{h}\ \dfrac{-2h}{-1+h} = \dfrac{-2}{-1+h} = \dfrac{2}{1-h}$

g) $x = 2$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(2)$ を極限を直接計算することによって求めよ.

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2}{1-h} = 2$

h) $y = f(x)$ のグラフの $(2, -1)$ における接線の方程式を求めよ.

$y-(-1) = 2(x-2)$

$y = 2x-5$

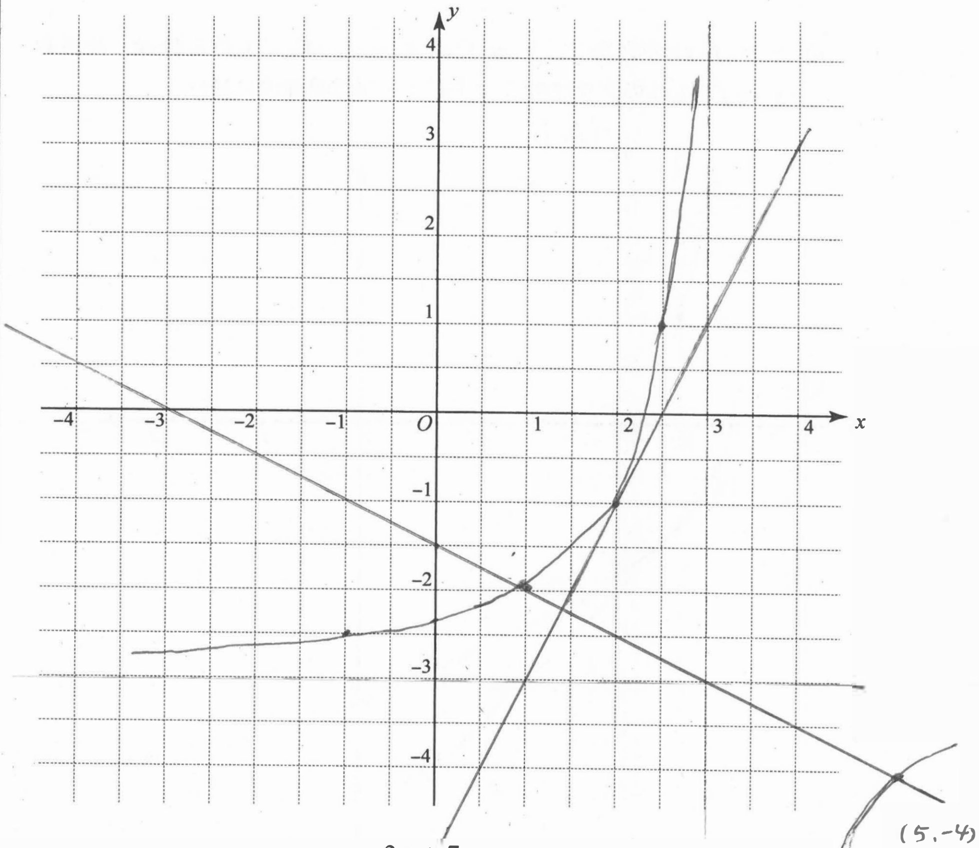
i) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ の交点を求めよ.

$\dfrac{-3x+7}{x-3} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \Rightarrow -3x+7 = -\dfrac{1}{2}(x+3)(x-3)$

$\Rightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow x = 1, 5.$ 交点 $(1,-2),\ (5,-4)$

j) $y = f(x)$ のグラフとその $(2, -1)$ における接線，および直線 $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ を右上の座標平面内に描け.



k) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-3x+7}{x-3} \leqq -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ を解け.

グラフより $x \leqq 1$ または $3 < x \leqq 5$

【裏面につづく】

2 $f(x) = -\sqrt{2x+7}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$2x+7 \geqq 0$ より $x \geqq -\frac{7}{2}$

値域：$y \leqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を求めよ．

$y = -\sqrt{2x+7} \Rightarrow y^2 = 2x+7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^2-7)$

ただし $y \leqq 0$

x と y を入れ換えて $y = \frac{1}{2}(x^2-7)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$　定義域 $x \leqq 0$

値域 $y \geqq -\frac{7}{2}$

c) $x = -3$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(-3)$ を極限を直接計算することによって求めよ．

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{2(-3+h)+7} - (-\sqrt{2(-3)+7})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{1+2h}+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-\sqrt{1+2h}+1)(\sqrt{1+2h}+1)}{h(\sqrt{1+2h}+1)}$$

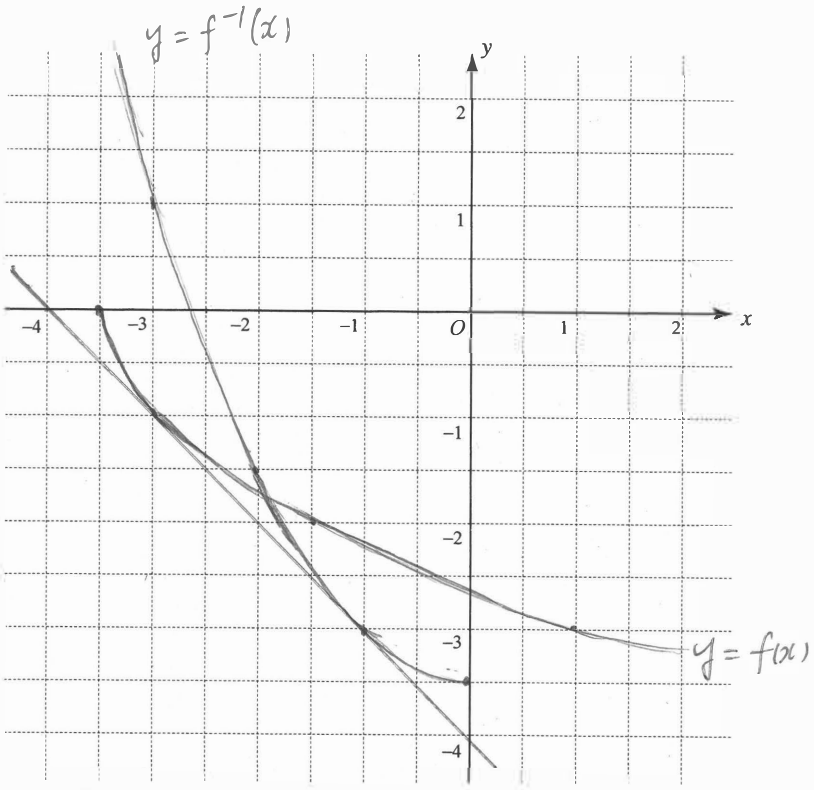
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(\sqrt{1+2h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1+2h}+1} = -1$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(-3, -1)$ における接線の方程式を求めよ．

$y - (-1) = -1 \times (x - (-3))$

$y = -x - 4$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$y = f(x)$ の $(-3, -1)$ における接線，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



3 $f(x) = (x-3)\sqrt{9-x^2}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を求めよ．

$9 - x^2 \geqq 0$ より $-3 \leqq x \leqq 3$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x-3)'\sqrt{9-x^2} + (x-3)(\sqrt{9-x^2})'$$

$$= \sqrt{9-x^2} + (x-3)\frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{9-x^2 - x(x-3)}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2x^2+3x+9}{\sqrt{9-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

$-2x^2+3x+9=0$ かつ $-3<x<3$ となる x を求める

$-(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

d) $f(x)$ の 2 階導関数 $f''(x)$ を計算すると $f''(x) = \dfrac{9-6x-2x^2}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$ となる．このことも用いて関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフ $y = f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．)

x	-3		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↳		⤴	変曲点	↱	0

e) $f(x)$ が定義される範囲内での最大値・最小値を求めよ．またグラフ $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

最大値　0　$(x = -3, 3)$

最小値　$-\frac{27\sqrt{3}}{4}$　$(x = -\frac{3}{2})$

変曲点の x 座標　$\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

4 a) $f(x)$ が微分可能で，$f(x) > 0$ をみたすとき，$(\log f(x))'$ を求めよ．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

b) $f(x)$，$g(x)$ が微分可能な関数であるとき，$(f(x)e^{g(x)})'$ を求めよ．

$$(f(x)e^{g(x)})' = f'(x)e^{g(x)} + f(x)(e^{g(x)})'$$

$$= f'(x)e^{g(x)} + f(x)e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$= (f'(x) + f(x)g'(x))e^{g(x)}$$

【2枚目につづく】

2019 年 7 月 16 日

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏　　　　名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

5 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \sqrt[4]{1-x+x^2}$

$$f'(x) = \left((1-x+x^2)^{\frac{1}{4}}\right)'$$
$$= \frac{1}{4}(1-x+x^2)^{-\frac{3}{4}} \times (1-x+x^2)'$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt[4]{(1-x+x^2)^3}} = \frac{1}{4}(2x-1)(1-x+x^2)^{-\frac{3}{4}}$$

b) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

c) $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$

$$f'(x) = (x^2-1)'e^{-x} + (x^2-1)(e^{-x})'$$
$$= 2xe^{-x} + (x^2-1)e^{-x} \times (-x)'$$
$$= (-x^2+2x+1)e^{-x}$$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$

$$f'(x) = \frac{(x)'\log x - x(\log x)'}{(\log x)^2}$$
$$= \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

6 $f(x) = \dfrac{1}{8}(x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 27)$ とする．

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x = \frac{1}{2}(x^3+6x^2+9)$$

b) $f'(x)=0$ となる x と，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow x(x+3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=0,-3$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x(x+3)^2>0 \Leftrightarrow x>0$$

c) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(x^2+4x+3)$$

d) $f''(x)=0$ となる x と，$f''(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1,-3$$
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)>0$$
$$\Leftrightarrow x<-3,\ x>-1$$

e) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフ $y=f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．)

x		-3		-1		0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↳	変曲点	⤵	変曲点	↳	極小	⤴

f) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ をそれぞれ求めよ．

$f(-3) = 0$

$f(-2) = -\frac{3}{8}$

$f(-1) = -2$

$f(0) = -\frac{27}{8}$

$f(1) = 0$

$f(2) = \frac{125}{8}$

g) $f(x)$ の極大値・極小値と，それをとるときの x の値を求めよ．

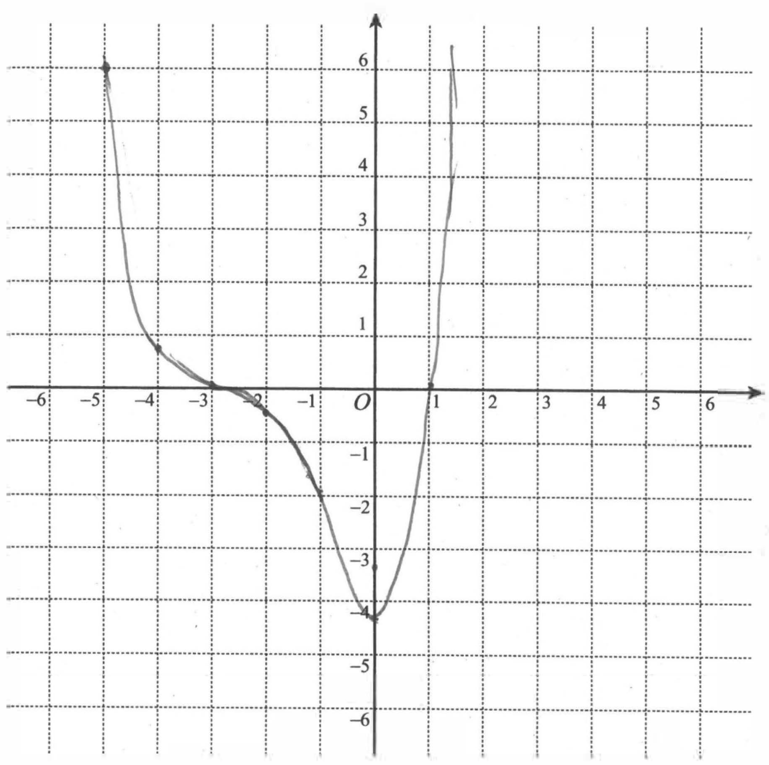
極大値なし

極小値 $-\frac{27}{8}$ $(x=0)$

h) $y=f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x=-3, -1$

i) ここまでの結果を反映させ，$y=f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け．



【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】