入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 関数 $f(x)=(2x-3)^2$ について，以下の問いに答えよ．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，できるだけ簡単にせよ．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(2(a+h)-3)^2-(2a-3)^2}{h}$$

← A^2-B^2 の形なので $(A-B)(A+B)$ と因数分解してもよい

$$=\frac{(\cancel{4a^2}+8ah+4h^2-12(\cancel{a}+h)+\cancel{9})-(\cancel{4a^2}-\cancel{12a}+\cancel{9})}{h}$$

$$=\frac{8a\cancel{h}+4h^{\cancel{2}}-12\cancel{h}}{\cancel{h}}=8a+4h-12$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}(8a+4h-12)$$

$$=8a-12\quad(=4(2a-3))$$

c) $y=f(x)$ のグラフの $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

b) より　$f'(1)=8-12=-4$

$(1,1)$ における接線の方程式は

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$　だから

$y-1=-4(x-1)$

$\therefore\ y=-4x+5$

2 関数 $f(x)=\dfrac{1}{mx+n}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，m,n は定数で，$m\neq 0$ とする．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，できるだけ簡単にせよ．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{m(a+h)+n}-\frac{1}{ma+n}}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(\frac{ma+n-(m(a+h)+n)}{(m(a+h)+n)(ma+n)}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{h}}\ \frac{-m\cancel{h}}{(m(a+h)+n)(ma+n)}$$

$$=\frac{-m}{(m(a+h)+n)(ma+n)}$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を a) でもとめた平均変化率の極限として求めよ．

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-m}{(m(a+h)+n)(ma+n)}$$

$$=\frac{-m}{(ma+n)^2}$$

3 関数 $f(x) = \sqrt{2x+3}$ について，以下の問いに答えよ．

a) x が a から $a+h$ まで変化したときの平均変化率を求め，分子を有理化することにより，できるだけ簡単にせよ．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{2(a+h)+3}-\sqrt{2a+3}}{h} \times \frac{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}}{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}}$$

$$= \frac{2(\cancel{a}+h)+\cancel{3}-(2\cancel{a}+\cancel{3})}{h\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)} = \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}}$$

b) $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を平均変化率の極限として求めよ．

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(a+h)+3}+\sqrt{2a+3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a+3}}$$

c) $y=f(x)$ のグラフの $(-1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

$$y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$$

$$y - 1 = 1 \times (x+1)$$

$$\therefore\ y = x+2$$

4 次の各々の関数について，その導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+(x+h)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(1+x^2)-(1+(x+h)^2)}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1+x^2-(1+x^2+2xh+h^2)}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\cdot\frac{-2x\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x+h}{(1+(x+h)^2)(1+x^2)}$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\,\frac{-\cancel{h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)