入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 $f(x) = \sqrt{-4x+12}$ のとする.

a) $f(x)$ の定義域，値域を求めよ.

根号内 $= -4x+12 \geqq 0$ より 定義域は $x \leqq 3$

$y=f(x)$ の値域は $y \geqq 0$

b) $f(x)$ の導関数を求めよ.

$f'(x) = \left(\sqrt{-4x+12}\right)' = \left((-4x+12)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-4x+12)^{-\frac{1}{2}} \times (-4x+12)'$

$= \frac{-4}{2\sqrt{-4x+12}} = \frac{-2}{\sqrt{-4x+12}} = \frac{-2}{2\sqrt{-x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{-x+3}}$

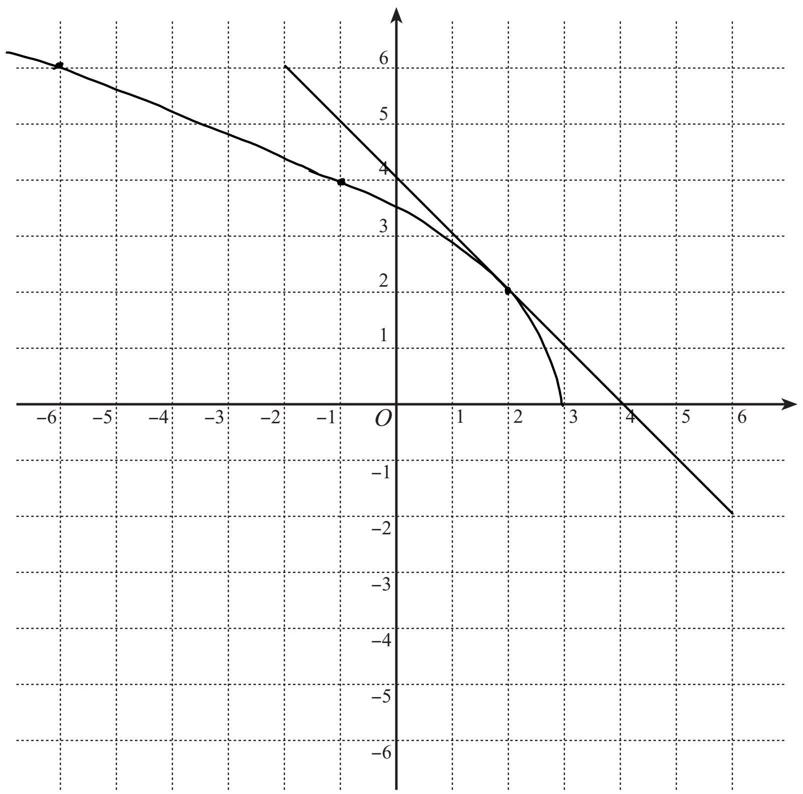
c) $y = f(x)$ のグラフの $(2, 2)$ における接線の方程式を求めよ.

$f'(2) = \frac{-2}{\sqrt{-8+12}} = -1$

接線は $(2, 2)$ を通り傾き -1 の直線

$y-2 = -1(x-2) \Rightarrow y = -x+4$

d) $y = f(x)$ のグラフと $(2, 2)$ における接線を描け.



2 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

根号内 $= 4-x^2 \geqq 0$ より

定義域は $-2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x) = \left(x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = (x)'(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\left((4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$

$= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x^2)'$

$= \sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x^2=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	╳	$-$	0	$+$	0	$-$	╳
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ.

増減表より 最大値 2 $(x=\sqrt{2})$

最小値 -2 $(x=-\sqrt{2})$

3 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき，その表面積 S を最小にしたい．

a) 底面の半径を r，高さ h とするとき， S と V をそれぞれ r と h で表せ．

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

b) S を V と r で表せ．

$V = \pi r^2 h$ より $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

これを S の式に代入し， $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2}$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

c) S を r の関数とみて， $\dfrac{dS}{dr}$ を計算し， S の増減表を書け．

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}$$

$\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

r は $r > 0$ の範囲を動く．

増減表は右の通り

r	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dr}$	$\times$	$-$	0	$+$
S	$\times$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

d) S が最小になるときの r の値を求めよ．また，そのときの h の値も求めよ．

増減表より $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき S は最小．

このとき $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi}\left(\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{V}}\right)^2 = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ $\left(= 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2r\right)$

半径 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, 高さ $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{2\pi}}$

4 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

真数条件 + 分母 $\neq 0$ より $x > 0$ が定義域

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ．

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\times$	$\nearrow$	最大	$\searrow$

c) b) の結果を用い， $\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ．

$f(x)$ は $x = e$ で最大値をとるから

$f(\pi) < f(e)$

$\therefore \dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$

d) c) の結果を用い， π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ． ［ヒント： $\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ．］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に πe をかけて

$e \log \pi < \pi \log e$

$\Rightarrow \log \pi^e < \log e^\pi$

$\therefore \pi^e < e^\pi$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)