

| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ |
|------|----|----|---|----|---|------|
|      |    |    |   |    |   | 氏名   |

1 関数  $f(x)$  を  $f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0, x > 1 \end{cases}$  で定義する.

a)  $f(x)$  が確率密度になるように  $c$  の値を定めよ.

$f(x)$  が確率密度になるためには  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  としなければならない. そこで, 左辺を計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx(1-x) dx = c \int_0^1 (x-x^2) dx = c \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{c}{6}$$

となる. したがって  $c = 6$  でなければならない.

b)  $f(x)$  を確率密度とする確率変数  $X$  について平均  $\mu = E(X)$  と分散  $\sigma^2 = V(X)$  を求めよ.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 6 \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx - \frac{1}{4} \\ = 6 \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

2 【正規分布】あるシーズンのプロ野球の1試合にかかる時間は, 平均3時間18分, 標準偏差24.0分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた. この結果をもとにして, 試合が2時間30分以内で終わる確率をもとめよ.

1試合にかかる時間を  $X$  とおくと, この調査結果は  $X$  が正規分布  $N(198, 24.0^2)$  に従っていることを意味する. ここで, 時間の単位は分である. 求める確率は  $P(X \leq 150)$  である. 今,  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-198}{24.0}$  とおくと,  $Z \sim N(0, 1)$  となり,

$$P(X \leq 150) = P\left(Z \leq \frac{150-198}{24.0}\right) = P(Z \leq -2.00)$$

が成り立つ. この確率を標準正規分布表から求めると次のようになる.

$$P(Z \leq -2.00) = P(Z \geq 2.00) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 (= \text{約 } 2.3\%)$$

3 【推定】某メーカーのあるデジタルカメラを購入しようと思い, インターネットでいろいろな店の値段  $X$  を調べてみたところ 25 店舗での平均は 3.5 万円であった.  $X$  の母標準偏差の値が 0.2 万円であるとわかっているとき, 平均価格を信頼度 95% で推定せよ.

標本平均  $\bar{X}$  は母平均価格を  $\mu$ , 母標準偏差を  $\sigma$  とするとき, 正規分布  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  に従うので,  $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  は  $N(0, 1)$  に従う. このとき,  $P(|Z| < k) < 0.95$  となるような  $k$  を正規分布表よりもとめると  $k = 1.96$  となる. そこで,  $|Z| < 1.96$  という条件を  $\mu$  について解くと,

$$\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る. これに  $\bar{X} = 3.5, \sigma = 0.2, n = 25$  をあてはめると,

$$3.5 - 1.96 \frac{0.2}{5} < \mu < 3.5 + 1.96 \frac{0.2}{5} \quad \text{より} \quad 3.4216 < \mu < 3.5784$$

4 【推定】昨年の紅白歌合戦の視聴率を調査するために無作為に 400 人を選び, アンケートをとったところ 160 人が紅白歌合戦を見たと言った. このとき, 紅白歌合戦の視聴率を信頼度 95% で推定せよ.

考え方は前問と同様. 視聴率を  $p$  とすると, 標準偏差  $\sigma$  は  $\sqrt{p(1-p)}$  となる (二項分布の  $n = 1$  の場合).

「標本視聴率」は  $\bar{p} = \frac{160}{400} = 0.40$  である. このとき,  $\sigma$  は  $\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})} = \sqrt{0.4 \times 0.6}$  で代用し,

$$0.4 - 1.96 \frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} < p < 0.4 + 1.96 \frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} \quad \text{より} \quad 0.352 < p < 0.448$$

5 【仮説検定】あるシーズンのプロ野球の1試合にかかる時間は、平均3時間18分、標準偏差24.0分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた。これでは試合時間が長すぎるという批判を受けて、プロ野球機構は試合時間短縮のためのある方策をとった。すると、シーズン最初の1ヶ月間に行なわれた36試合の平均時間は3時間10分となった。このとき、機構のとった方策の効果が本当にあったと言えるか、有意水準5%で検定せよ。

帰無仮説  $H_0: \mu = 198$ 、対立仮説  $H_1: \mu < 198$  として、片側検定を行う。

そこで、 $\mu = 198$  と仮定し、36試合の標本平均  $\bar{X}$  に対し、 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 198}{4.0}$  とおく。このとき、

$Z \sim N(0, 1)$  となるが、標準正規分布表を用いると、 $Z < -1.645$  となる確率が5%未満であることがわかる。いま、 $\bar{X} = 190$  とすると  $Z = -2.0 < -1.645$  となるので、このような確率は5%未満であり、「滅多に起きない」と考えられ、帰無仮説  $H_0$  は棄却される。これより、対立仮説  $H_1$  が採択され、「方策の効果があり、平均試合時間は短縮した」と結論づけられる。

6 【仮説検定】全国の大学生の体格指数 BMI (Body Mass Index = (体重 kg) / (身長 m)<sup>2</sup>) の平均は22.0で標準偏差は2.0であることがわかっているとす。ある学生グループ49人に対して健康診断を行い BMI を調べたところ平均は20.7であった。この学生のグループは全国の学生と比較して痩せていると言えるか、有意水準5%で検定せよ。

帰無仮説  $H_0: \mu = 22.0$ 、対立仮説  $H_1: \mu < 22.0$  として、片側検定を行う。

前問と同様にして、 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 22.0}{\frac{2.0}{7}}$  とおき、 $\bar{X} = 20.7$  のときの  $Z$  の値を計算すると  $Z = -4.55 < -1.65$  となる。したがって  $H_0$  は棄却され、このグループの学生は全国平均と比べて痩せていると言える。

7 【仮説検定】昨年末の紅白歌合戦第2部の視聴率は全国平均40%であったという調査がある。C大学の学生600人にアンケートをとったところ216人が紅白歌合戦第2部を見たと答えた。この結果から、C大生の間の紅白視聴率は全国平均より低かったと言えるか、有意水準5%で検定せよ。

検定の枠組みは前2問と同様であるが、問題4のように  $\sigma$  として  $\sqrt{p(1-p)}$  を用いることだけが異なる。

$Z = \frac{\bar{p} - 0.4}{\frac{\sqrt{0.4(1-0.4)}}{\sqrt{600}}}$  に対し、 $\bar{p} = \frac{216}{600}$  とおいて計算すると、 $Z = -2.0$  となるので、この問題でも  $H_0$  は

棄却され、C大生の視聴率は全国平均と比べて低かったと言える。