入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ a) 初項 a，公比 x の無限等比級数の和は

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots = \frac{a}{1-x}$$

となる．この両辺を x で微分することにより次の式を示せ．

$$a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots = \frac{ax}{(1-x)^2}$$

各辺を微分すると

$$\left(a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^k + \cdots\right)' = a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots$$

$$\left(\frac{a}{1-x}\right)' = \left(a(1-x)^{-1}\right)' = -a((1-x)^{-2}(1-x)' = a(1-x)^{-2} = \frac{a}{(1-x)^2}$$

したがって

$$a + 2ax + 3ax^2 + \cdots + kax^{k-1} + \cdots = \frac{a}{(1-x)^2}$$

b) 同様にして，$a + 2^2ax + 3^2ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots$ を求めよ．

［ヒント： a) の式の両辺に x をかけて微分せよ．］

a) の式の両辺に x をかけて微分すると

$$\left(ax + 2ax^2 + 3ax^3 + \cdots + kax^k + \cdots\right)' = a + 2^2ax + 3^3ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots$$

$$\left(\frac{ax}{(1-x)^2}\right)' = \left(ax(1-x)^{-2}\right)' = a(x)'(1-x)^{-2} - 2ax(1-x)^{-3}(1-x)'$$

$$= a(1-x)^{-3}\left((1-x) + 2x\right) = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3}$$

したがって

$$a + 2^2ax + 3^3ax^2 + \cdots + k^2ax^{k-1} + \cdots = \frac{a(1+x)}{(1-x)^3}$$

$\boxed{2}$ 「確率 p で成功，確率 $q = 1-p$ で失敗」という試行を何回も繰り返すとき，最初に成功するまでの試行回数を X とする．すなわち、確率変数 X は

X	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	計
P	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$	1

という確率分布を持つとする．

a) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$\boxed{1}$ a) の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^{k-1} = p + 2pq + 3pq^2 + \cdots + kpq^{k-1} + \cdots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

（ここで， $q = 1-p$ より， $1-q = p$ であることを用いた．）

b) X の分散 $V(X)$ を，公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いて求めよ．

$\boxed{1}$ b) の式で $a = p, x = q$ とおいて，

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = p + 2^2pq + 3^2pq^2 + \cdots + k^2pq^{k-1} + \cdots$$

$$= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{(2-p)}{p^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(2-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$\boxed{3}$ ある打者は，1 回の打席でヒットを打つ確率が 3 割であるとする．

a) 【復習】この打者が 10 回打席に入ったとき，ヒットを打つ回数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つ回数 X は $B(10, 0.3)$ に従うので，

$$E(X) = np = 10 \times 0.3 = 3$$
$$V(X) = npq = 10 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 2.1$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.1} \fallingdotseq 1.449$$

b) この打者がはじめてヒットを打つまでに必要な打数の期待値と分散を求めよ．

ヒットを打つまでに凡退する回数 Y は $\boxed{2}$ の分布（幾何分布という）に従うので，

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.333\ldots$$
$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{1 - 0.3}{0.3^2} = 7.777\ldots$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7.777\ldots} \fallingdotseq 2.789$$

$\boxed{4}$ 人に次々に誕生日を尋ねていくとき，n 人目に初めて自分と同じ誕生日の人に出会う確率を求めよ．また，何人目に初めて自分と同じ誕生日の人に出会うか，その平均値を求めよ．（簡単のために閏年は考慮しないことにする．）

$\boxed{2}$ で $p = \frac{1}{365}$ の場合であるから，求める確率は $\left(\frac{1}{365}\right)^{n-1} \frac{1}{365}$.

またその平均値は $\boxed{2}$ a) より $\left(\frac{1}{365}\right)^{-1} = 365$ 人.

$\boxed{5}$ 2 人がじゃんけんをするとき，両者ともに，石，紙，はさみを，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で無作為に出すものとする．勝負がつくまでじゃんけんを繰り返すとするとき，平均何回で勝負がつくか．

2 人の石，紙，はさみの出し方の組合せは $3 \times 3 = 9$ 通り．そのうち勝負がつくのは，あいこの 3 通りを除いた 6 通り．したがって，$\boxed{2}$ で $p = \frac{2}{3}$ の場合であり，平均値は $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$ 回.