入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
										氏名	

1 a) 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6}\times 21 = \frac{7}{2} \quad (=3.5)$$

$$V(X) = \frac{1}{6}\left((1-\tfrac{7}{2})^2+(2-\tfrac{7}{2})^2+(3-\tfrac{7}{2})^2+(4-\tfrac{7}{2})^2+(5-\tfrac{7}{2})^2+(6-\tfrac{7}{2})^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}(5^2+3^2+1^2+1^2+3^2+5^2)$$

$$= \frac{1}{24}\times 70 = \frac{35}{12} \quad (\fallingdotseq 2.92)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6} \quad (\fallingdotseq 1.71)$$

b) 1 個のさいころを投げて，出た目の数だけ 100 円硬貨がもらえるゲームで， 300 円払ってゲームをするとき，利益 Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$Y = 100X - 300$ と表せるから

$$E(Y) = E(100X-300) = 100E(X) - 300$$

$$= 350 - 300 = 50$$

$$V(Y) = V(100X-300) = 100^2 V(X)$$

$$= 100^2\times\frac{35}{12} = \frac{87500}{3} \quad (\fallingdotseq 29166.7)$$

$$\sigma(Y) = 100\times\frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{50\sqrt{105}}{6} \quad (\fallingdotseq 170.8)$$

2 1 枚の硬貨を続けて 6 回投げるとき，表の出る回数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

b) 確率変数 X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{64}(0\times1+1\times6+2\times15+3\times20+4\times15+5\times6+6\times1)$$

$$= \frac{1}{64}\times192 = 3$$

$$V(X) = \frac{1}{64}\big((0-3)^2\times1+(1-3)^2\times6+(2-3)^2\times15+(3-3)^2\times20$$
$$+(4-3)^2\times15+(5-3)^2\times6+(6-3)^2\times1\big)$$

$$= \frac{1}{64}(9+24+15+0+15+24+9) = \frac{96}{64} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\fallingdotseq 1.22)$$

c) 数直線上に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に 1 だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に 1 だけ動かす．最初に針を原点に立てておき，硬貨を 6 回投げた後の針の座標を Y とする．Y を X を用いて表し， Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

表の出る回数が X であれば裏は $6-X$ 回出るので

針の座標 Y は　$Y = 1\times X + (-1)\times(6-X) = 2X-6$ と表される．

$$E(Y) = E(2X-6) = 2E(X)-6 = 2\times3-6 = 0$$

$$V(Y) = V(2X-6) = 2^2V(X) = 4\times\frac{3}{2} = 6$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2X-6) = 2\sigma(X) = \sqrt{6}$$

3 次の表は，あるクラスの英語のテストの成績である．

点数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
人数	1	0	2	9	12	6	5	3	2	40

このクラスから 1 人の生徒を選び，その生徒の点数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
P	$\frac{1}{40}$	$\frac{0}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{40}$	1

b) 確率変数 X の平均 $\mu = E(X)$ と標準偏差 $\sigma = \sqrt{V(X)}$ を求めよ．

$$\mu = E(X) = \frac{1}{40}(2\times1+3\times0+4\times2+5\times9+6\times12+7\times6+8\times5+9\times3+10\times2)$$

$$= \frac{1}{40}\times256 = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$E(X^2) = \frac{1}{40}(4\times1+9\times0+16\times2+25\times9+36\times12+49\times6+64\times5+81\times3+100\times2)$$

$$= \frac{1}{40}\times1750 = \frac{175}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{175}{4} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{279}{100} = 2.79$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{279}}{10} = \frac{3\sqrt{31}}{10} \fallingdotseq 1.67$$

c) $P(|X-\mu| \leqq \sigma)$， $P(|X-\mu| \leqq 2\sigma)$， $P(|X-\mu| \leqq 3\sigma)$ を求めよ．

$$|X-\mu| \leqq \sigma \Leftrightarrow \mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma \Leftrightarrow 4.73 \leqq X \leqq 8.07$$

$$\Leftrightarrow X = 5, 6, 7, 8$$

$$\therefore P(|X-\mu| \leqq \sigma) = P(X=5,6,7,8) = \frac{9}{40}+\frac{12}{40}+\frac{6}{40}+\frac{5}{40} = \frac{32}{40} = 0.8$$

同様にして

$$P(X-\mu \leqq 2\sigma) = P(X=4,5,\cdots,9) = 1-\left(\frac{1}{40}+\frac{2}{40}\right) = \frac{37}{40} = 0.925$$

$$P(X-\mu \leqq 3\sigma) = P(X=2,3,\cdots,10) = 1$$

4 ある大学では学生の数学と英語の成績の分布が次の表の通りであった．

数学＼英語	A	B	C	計
A	15 %	15 %	5 %	35 %
B	10 %	20 %	10 %	40 %
C	5 %	10 %	10 %	25 %
計	30 %	45 %	25 %	100%

いま， A= 4 点， B= 3 点， C= 2 点という換算式を用いて数学と英語の成績を点数で表し、それぞれの X， Y で表す．

a) この学生たちの数学の平均点 $E(X)$ と英語の平均点 $E(Y)$ を求めよ．

$$E(X) = 4\times0.35 + 3\times0.4 + 2\times0.25 = 3.10$$

$$E(Y) = 4\times0.3 + 3\times0.45 + 2\times0.25 = 3.05$$

b) Z を数学と英語から算出した GPA とする．すなわち，数学と英語の成績が，例えば (B,A) であれば， $Z\big((\mathrm{B,A})\big) = (3+4)/2 = 3.5$ と定義する．次の表を完成させよ．

Z	2	2.5	3	3.5	4	計
P	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15	1

c) Z の期待値 $E(Z)$ を求めよ．

$$E(Z) = 2\times0.1 + 2.5\times0.2 + 3\times0.3 + 3.5\times0.25 + 4\times0.15$$

$$= 3.075$$

問題文に誤りがありました
すみませんでした。

d) $E(Z) = \frac{E(X)+E(Y)}{2}$ であることを確かめよ．

$$\frac{E(X)+E(Y)}{2} = \frac{3.10+3.05}{2} = 3.075 = E(Z)$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)